

Théorie des Groupes

Licence 3 - Janvier 2012

Questions de cours

- (a) 1 Montrer qu'un groupe non abélien d'ordre 6 a un sous groupe normal d'ordre 3. En déduire que tout groupe d'ordre 6 est isomorphe soit à $\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$ soit au groupe symétrique S_3 .
- 2 Montrer qu'aucune permutation de S_4 n'est d'ordre 6.
- 3 Montrer que les seuls éléments de A_4 d'ordre 2 sont les permutations $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)$.
- 4 Montrer que A_4 ne possède pas de sous groupe d'ordre 6. Expliquer en quoi ceci montre que la réciproque du théorème de Lagrange est fausse.
- (b) Définir ce qu'est un groupe résoluble. S_5 est-il résoluble ?
- (c) Définir les notions d'éléments irréductibles et d'éléments premiers d'un anneau A . Montrer qu'un élément premier est irréductible.

Exercice 1

- (a) Soit p un nombre premier. Montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps. En considérant le groupe multiplicatif des éléments non nuls de $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a p divise $x^p - x$.
- (b) On considère un groupe fini G ayant exactement deux classes de conjugaison.
 - 1 Montrer que les éléments de G différents du neutre e ont même ordre disons n .
 - 2 Montrer que n est premier.
 - 3 Soit $e \neq a \in G$. Montrer par l'absurde que $a^2 = e$ (aide Si $a^2 \neq e$ montrer qu'il existe $x \in G$ tel que $xax^{-1} = a^2$ en déduire que $a^{2^n} = a$ et donc que $2^n = 1 \pmod{n}$, utiliser alors (a)).
 - 4 Montrer que G est abélien.
 - 5 Conclure que G est le groupe à deux éléments.

Exercice 2 On considère l'anneau des polynômes $A := \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}[x]$.

- (a) Cet anneau est-il intègre ? est-il principal ?
- (b) Montrer que les éléments de la forme $1 + 2p(x)x$ où $p(x) \in A$ sont inversibles dans A . Trouver tous les éléments inversibles de A .
- (c) Montrer que les éléments inversibles $U(A)$ de A forment un groupe pour la multiplication. Montrer que les sous groupes finis de $U(A)$ sont tous d'ordre une puissance de deux.