DS DE GÉOMÉTRIE FONDAMENTALE

LICENCE DE MATHÉMATIQUES

Avril 2004; Durée 2 heures.

QUESTION DE COURS

A) Définir ce qu'est une affinité et ce qu'est une transvection. Montrer qu'une affinité est une transformation affine.

B) Soit un triangle ABC. On pose : $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Soit $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ les mesures respectives, en radians, de $[\widehat{BAC}], [\widehat{ABC}], [\widehat{BCA}]$. Soit A_1, B_1, C_1 les projetés orthogonaux respectifs de A, B, C sur $(BC), (CA), (AB)$.

  (a) Démontrer que $A_1 = Bar\{(B, b\cos\hat{C}), (C, c\cos\hat{B})\}$.

  (b) En déduire que si le triangle n'est ni rectangle en B, ni rectangle en C, alors : $A_1 = Bar\{(B, \tan\hat{B}), (C, \tan\hat{C})\}$.

  (c) Conclure que si le triangle ABC n'est pas un triangle rectangle alors : l'orthocentre du triangle ABC est le barycentre de $\{(A, tan\hat{A}), (B, \tan\hat{B}), (C, \tan\hat{C})\}$

Exercice 1

(1) Définir sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ une structure d'espace affine.

(2) Soient $n \leq m$ deux nombres naturels non nuls. On considère $\{a_1, \ldots, a_n\}$ et $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ deux ensembles de nombres réels. On suppose que pour $i \neq j$, $a_i \neq a_j$. Montrer que l'ensemble $X = \{f \in \mathbb{R}[x] \,|\, f(a_i) = \alpha_i \, \forall i \in \{1, \ldots, n\} \text{ et } \deg f \leq m\}$ est un sous-espace affine de l'espace défini en 1), calculer sa direction et sa dimension.

Exercice 2

(1) Soit h une application affine bijective, montrer que l'image de l'intersection de deux droites sécantes est l'intersection des images de ces deux droites.

(2) Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.

(3) Soient A, B, C, M quatre points d'un plan affine et A', B', C' les milieux respectifs de $[BC], [CA], [AB]$. Montrer que les parallèles à (MA') menée par A, à (MB') menée par B, à (MC') menée par C sont concourantes (utiliser une homothétie).