DS DE GEOMETRIE

LICENCE DE MATHEMATIQUES

avril 2003

QUESTIONS DE COURS

I) Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus et I,J,K les pieds des hauteurs issues respectivement de A,B,C. On oriente le plan de façon que les angles

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}),(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}),(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$$

admettent pour mesures respectives les réels α,β,γ dans $]0,\pi/2[$. On admettra que le triangle orthique est "une trajectoire de lumière". Soit S_{AB} et S_{AC} les symétries orthogonales d'axes respectifs (AB) et (AC). On note $I_1 = S_{AB}(I)$ et $I_2 = S_{AC}(I)$.

a) Montrer que I_1,K,J,I_2 sont alignés dans cet ordre.

b) Démontrer que $I_1I_2 = 2AIsin(\alpha)$.

c) En déduire que le périmètre du triangle orthique IJK de ABCest égal à $8S^2/abc$ où S désigne l'aire du triangle ABC et $a = BC\, b = CA, c = AB$.

II) Enoncer et expliquer la formule de Burnside pour les actions de groupes.

EXERCICE 1

Dans le plan affine X on considère un repère affine A,B,C et on décompose tout vecteur de $\overrightarrow{X}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. Soit M un point de X. On considère le triplet

$$(det(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}), det(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}), det(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})).$$

En remarquant que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$,$\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{MC}$ sont linéairement dépendants, montrer que ce triplet définit un système de coordonnées barycentriques du point M dans le repère A,B,C.

EXERCICE 2

Soit V un espace vectoriel de dimension n. Montrer que $GL(V)$ agit sur l'ensemble X des sous-espaces vectoriels de V. Déterminer l'orbite et le stabilisateur de $W \in X$. Combien existe-t-il d'orbites?

EXERCICE 3

Montrer qu'une action simplement transitive est fidèle et que la réciproque est vraie lorsque le groupe est commutatif.