Licence de Mathématiques — 3° année
Maîtrise de Mathématiques — 1° année
Examen de géométrie

Avril 2005 ; durée 4 h.

PARTIE ALGÉBRIQUE

EXERCICE 1 Soit k un corps algébriquement clos avec $2 \neq 0$. Comme d'habitude, on appellera $\mathbb{A}^n$ l'espace affine k^n ; pour un ensemble algébrique $V \subset \mathbb{A}^n$, on notera $k[V]$ l'algèbre des fonctions régulières.
On regarde dans $\mathbb{A}^2$ les ensembles suivants : $C_a := y^2 = x^3 - ax$, pour $a \in k$.
Les questions sont très souvent indépendantes.

1. Montrer que C_a est un ensemble algébrique.
2. Montrer que si $Y^2 - X^3 + aX$ était réductible, alors il s'écrirait $(Y - f(X))(Y - g(X))$ où f et g seraient 2 polynômes en X .
3. Que vaut $k[C_a]$?
4. Montrer que $D := xy = 0$ n'est pas isomorphe à C_a, $\forall a \in k$ (on pourra regarder les composantes irréductibles de ces ensembles).
5. Montrer que C_a est isomorphe à C_1 si $a \neq 0$ (on pourra regarder l'application qui envoie x et y sur $xa^{-1/2}$ et $ya^{-3/4}$).
6. Montrer que C_0 et $\mathbb{A}^1$ sont homéomorphes pour la topologie de Zariski (on pourra envoyer t sur $x = t^2$ et $y = t^3$), sont-ils isomorphes en tant qu'ensembles algébriques (justifier sommairement) ?
7. (a) Montrer que si C_0 et C_1 étaient isomorphes, on aurait 2 polynômes P et Q dans $k[T]$ qui vérifieraient $P^2 = Q^3 - Q$
   (b) Montrer qu'alors on pourrait trouver U, V et W tels que $Q = U^2$, $Q+1 = V^2$ et $Q-1 = W^2$ (on pourra décomposer P et $Q^3 - Q$ en produit de polynômes irréductibles).
   (c) Montrer que si 2 polynômes U et V vérifient $V^2 - U^2 = 1$ alors les 2 polynômes sont de degré 0.
   (d) Montrer que C_1 et C_0 ne sont pas isomorphes.

QUESTIONS DE COURS

1. Enoncer le théorème des zéros de Hilbert (Nullstellensatz)
2. Enoncer le théorème de décomposition en composantes irréductibles d'un ensemble algébrique.

T.S.V.P.–>

PARTIE PROJECTIVE

QUESTIONS DE COURS

1. Expliquer le principe de dualité. Examiner en particulier le cas de la dimension 2.
2. Soient A^* et B^* deux faisceaux de droites d'un plan projectif et s une doite de ce plan ne passant ni par A, ni par B. Définir la notion de projection de A^* vers B^* d'axe s. Donner l'énoncé dual de la propriété suivante : Une homographie h entre deux droites projectives Δ et Δ' d'un plan projectif est une projection si et seulement si $h(O) = O$ où $O = \Delta \cap \Delta'$.
3. Donner l'énoncé dual du théorème de Pappus.

Exercice 1

Soit $i : D \longrightarrow D$ une involution d'une droite D d'un plan projectif. On suppose connus les points $A, A', B, B' \in D$ tels que $i(A) = A'$ et $i(B) = B'$. Soient Δ une droite distincte de D passant par A et R un point n'appartenant ni à D ni à Δ. En considérant successivement les projections p_1 de D sur Δ de centre R, p_2 de Δ sur $A'R$ de centre B' et p_3 de $A'R$ sur D de centre $B_1 := \Delta \cap RB$, indiquer comment construire l'image $i(C)$ d'un point C de D. (Justifier votre construction).

Exercice 2

On donne $\{A = p(e_1), B = p(e_2), C = p(e_3), D\}$ un repère projectif d'un plan projectif P, où p désigne l'application canonique $p : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow P$ et e_1, e_2, e_3 une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Décrire explicitement l'application p. Trouver $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $p(v) = D$.
2. Calculer les coordonnées homogènes de $AB \cap CD$ dans le repère A, B, C, D.
3. De quel type est l'homographie h définie par $h|_{AB} = id.$, $h(C) = C$ et $h(D) = D' = p(e_1 + e_2 + 2e_3)$? Donner une matrice représentant h dans la base e_1, e_2, e_3.
4. On note i l'involution de P laissant fixe la droite AB et le point C. Calculer $i(D)$.

Exercice 3

Montrer qu'un triangle inscrit à une conique est autopolaire.