

DS De Géométrie

LM3 et MM1 ; NOVEMBRE 2004

QUESTION DE COURS

- Définir l'axe d'une homographie h entre deux droites d, d' d'un plan projectif. Préciser la position de cet axe par rapport $d \cap d'$.
- Enoncer le théorème de Chasles.
- Montrer que les homologies d'un plan projectif ayant même centre forment un groupe.

EXERCICE 1

- (1) Donner l'équation de la conique de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passant par les points :

$$Q(1, 0, 1); R(1, 1, 0); T(1, 1, 1); P(-1, 0, 1)$$

et tangente en P la droite $x + y + z = 0$.

- Donner les coordonnées homogènes du pôle de la droite (QR) .
- Donner l'équation de la polaire du point T .

EXERCICE 2

Soit h une homographie involutive du plan projectif réel.

- Soit D une droite non stable. Montrer que $h|_D : D \longrightarrow D' = h(D)$ est une projection dont l'axe est constitué de points fixes.
- Montrer que h est en fait une homologie de birapport -1 .
- Si D_1 et D_2 sont deux droites non stables du plan, que peut on dire des axes des homologies obtenues par restrictions de h à D_1 et D_2 . ?
- Quel(s) type(s) d'application(s) affine(s) correspond(ent) à h sur la carte affine définie par l'axe de h , discuter éventuellement.

EXERCICE 3

Soit Γ une conique du plan projectif et d une droite coupant Γ en deux points distincts I et J . Montrer que deux points distincts M_1 et M_2 de la droite d sont conjugués par rapport à Γ si et seulement si $(I, J, M_1, M_2) = -1$.

EXERCICE 4

Démontrer que quatre points du plan complexe distincts deux à deux sont alignés ou cocycliques si et seulement si le birapport de leurs affixes est un réel.