Géométrie fondamentale

LICENCE DE MATHEMATIQUES, JUIN 2004

QUESTION DE COURS
Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles non aplatis du plan affine euclidien.

(1) Montrer que si $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ et $C'A' = CA$ alors les deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.
(2) Montrer que si $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$ alors les deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

Problème

Soient X un espace affine réel, $H(X)$ l'ensemble des homothéties de X, $T(X)$ le groupe des translations et $HT(X) := H(X) \cup T(X)$ le groupe des homothéties-translations de X. On notera dans la suite $h := h_{O,\lambda} : X \longrightarrow X : M \mapsto O + \lambda\overrightarrow{OM}$ l'homothétie de centre O et de rapport $\lambda \neq 0$.

1. Pour $\overrightarrow{u}$ un vecteur quelconque de $\overrightarrow{X}$, montrer que $h^{-1} \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ h$ est la translation de vecteur $\lambda^{-1}\overrightarrow{u}$. Décrire l'ensemble $\{f \in T(X) \,|\, f \circ h = h \circ f\}$.
2. Soit G un sous groupe normal de $HT(X)$ non contenu dans $T(X)$.
   a) Soit $h = h_{0,\lambda} \in G \setminus T(X)$, montrer que pour tout homothétie $g = g_{M,\mu}$, $\mu \neq 0$, $h^{-1} \circ g^{-1} \circ h \circ g \in T(X) \cap G$.
   b) Avec les notations de a) ci-dessus on pose $U := (h^{-1} \circ g^{-1} \circ h \circ g)(M)$, montrer que $\overrightarrow{OU} = \frac{\mu-1+\lambda}{\lambda\mu}\overrightarrow{OM}$. En déduire que $T(X) \subseteq \{h^{-1} \circ g^{-1} \circ h \circ g \,|\, g \in H(X)\}$ et donc que $T(X) \subset G$.

3. Soit $\phi : T(X) \longrightarrow \overrightarrow{X} : t_{\overrightarrow{u}} \mapsto \overrightarrow{u}$.
   a) Montrer que ϕ est un isomorphisme de groupes.
   b) Montrer que les sous groupes distingués de $HT(X)$ contenus dans $T(X)$ correspondent via ϕ aux sous espaces vectoriels de $\overrightarrow{X}$. (Aide : utiliser le calcul fait en 1.).

4. Montrer que tout sous groupe distingué et commutatif de $HT(X)$ est un sous groupe de $T(X)$. (Aide : utiliser la description demandée en 1. et le résultat obtenu en 2.b)).

Exercice 1 Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x', y', z')$, définie ci-dessous:

$$\begin{aligned} x' &= (x - 8y - 4z + 2)/9 \\ y' &= (-8x + y - 4z + 2)/9 \\ z' &= (-4x - 4y + 7z + 1)/9 \end{aligned}$$

est une isométrie affine de $\mathbb{R}^3$. Déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques.

Exercice 2
Montrer qu'un automorphisme orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2 ayant un vecteur non nul fixe est soit l'identité soit la réflexion par rapport à une droite.