EXAMEN DE GEOMETRIE

MAITRISE-LICENCE DE MATHEMATIQUES

JUIN 2002

QUESTIONS DE COURS

Question 1

Soit ABC un triangle non isocèle. On note $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$. Soit I_1 (resp. J_1) le point où la bissectrice intérieure (resp. extérieure) de $[\widehat{BAC}]$ coupe la droite (BC).

Démontrer que

$$\frac{\overline{I_1B}}{\overline{I_1C}} = -\frac{c}{b} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{J_1B}}{\overline{J_1C}} = \frac{c}{b}$$

En déduire que les trois bissectrices intérieures d'un triangle se coupent en un même point noté I. Montrer que I est le centre du cercle inscrit au triangle et que $I = bar(\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$.

Question 2

Soit E un espace affine euclidien. On note $Ga(E)$ et $GL(E)$ respectivement les groupes affine et linéaire de E. On considère l'application $\Phi : Ga(E) \longrightarrow GL(E) : f \mapsto \overrightarrow{f}$.

a) Montrer que Φ est un morphisme de groupes.

b) Déterminer géométriquement le noyau de Φ.

c) Montrer que l'image réciproque $\Phi^{-1}(E)$ de l'ensemble $E = \{$homothéties vetcorielles de $\overrightarrow{E}\}$ est un sous-groupe normal de $GA(E)$. Comment s'appelle ce sous-groupe ?

!!! FEUILLE SÉPARÉE !!! FEUILLE SÉPARÉE !!! FEUILLE SÉPARÉE !!!

Question 3 (géométrie projective)

a) Énoncer et démontrer le théorème de Pappus. Dans la démonstration, donner les énoncés complets des résultats utilisés.

b) Donner l'énoncer du théorème dual au théorème de Pappus.

Question 4 (géométrie algébrique)

a) Donner la définition d'un espace topologique *irréductible*.

b) Démontrer qu'un ensemble algébrique Y d'un espace affine X est irréductible si et seulement si l'idéal $I(Y) \subset F[X]$ est un idéal premier.

c) Donner deux exemples d'ensembles algébriques irréductibles (en expliquant pourquoi ils le sont).

EXERCICES

Exercice 1 (corrigé en TD)

Démontrer le théorème de Céva: Soit ABC un triangle non aplati et soit

$$L = \lambda_B B + \lambda_C C$$

$$M = \mu_C C + \mu_A A$$

$$N = \eta_A A + \eta_B B$$

Pour que les droites AL, BM et CN soient parallèles ou concourantes il faut et il suffit que

$$\lambda_B \mu_C \eta_A = \lambda_C \mu_A \eta_B$$

(on peut utiliser le critère pour que trois droites d'équations en coordonnées barycentriques données soient parallèles ou concourantes).

Exercice 2 (non corrigé en TD)

Pour l'application $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(x, y, z) = (x', y', z')$, définie ci-dessous, vérifier qu'elle est une isométrie et déterminer son type et éléments caractéristiques. En plus, déterminer le type et éléments caractéristiques de l'opérateur orthogonal $\vec{f}$:

$$x' = y + 3$$

$$y' = z - 2$$

$$z' = x - 1$$