EXAMEN DE GEOMETRIE FONDAMENTALE

LICENCE DE MATHEMATIQUES

JUIN 2003

QUESTION DE COURS

Soit ABC un triangle non rectangle et I, J, K les pieds des hauteurs issues de A, B, C. On note H l'orthocentre et O le centre du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle ABC.

a) Montrer que les paires de droites $\{(AB),(AC\}$ et $\{(AH),(AO)\}$ ont les mêmes bissectrices.

b) On suppose que les trois angles du triangle ABC sont aigus. Montrer que le point I appartient au segment $[BC]$ privé de B et C.

EXERCICE 1

Soit P un plan affine euclidien, on note $T(P)$ le groupe des translations de P. Un groupe G d'isomtries de P est un groupe de frise s'il existe in vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$ such that $T = G \cap T(P) = \{t_{n\overrightarrow{u}} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. On note σ la rflexion vectorielle par rapport la droite $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$.

a) Montrer que $f \in G$ alors $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) \in \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et en dduire que $\overrightarrow{G}$ est l'un des cinq groupes suivants :

$$\{id_{\overrightarrow{P}}\}, \quad \{id_{\overrightarrow{P}}, -id_{\overrightarrow{P}}\}, \quad \{id_{\overrightarrow{P}}, \sigma\}, \quad \{id_{\overrightarrow{P}}, -\sigma\}, \quad \{id_{\overrightarrow{P}}, -id_{\overrightarrow{P}}, \sigma, -\sigma\}.$$

b) Montrer que pour que G contienne une symtrie centrale $-id_{\overrightarrow{P}}in\overrightarrow{G}$. Si $p \in P$ et $s_p \in G$ est une symtrie centrale de centre p montrer qu'alors les centres des symtries centrales de G sont de la forme $p + fracn2\overrightarrow{u}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

c) Montrer que pour que G contienne une rflexion autour d'une droite orthogonale $\overrightarrow{u}$, il faut et il suffit que $-\sigma in\overrightarrow{G}$. Comment sont alors les axes de ces rflexions ?

d) Montrer que pour que G contienne une rflexion glisse, il faut et il suffit que $\sigma \in G$.

EXERCICE 2

On considre trois points non aligns a, b, c du plan affine euclidien P. On construit les points a', b', c' tels que les triangles abc', acb', cab' soient quilatraux. On dsigne par u, v, w les isobarycentres de ces triangles.

(1) Montrer que aa' = bb' = cc'.

(2) Montrer que le triangle uvw est quilatral.

EXERCICE 3

Dans l'espace affinne euclidien usuel E_3 muni d'un repre orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, tudier l'application f associant au point $M(x, y, z)$ le point $M(x', y', z')$ o

$$\begin{array}{rrrrrr} x' = & 1/3(-2x & -2y & +z & -5) \\ y' = & 1/3(-2x & +y & -2z & -2) \\ z' = & 1/3(x & -2y & -2z & +1) \end{array}$$