Examen De Géométrie

LICENCE-MAITRISE DE MATHEMATIQUES

JUIN 2004

QUESTION DE COURS

Soit $\mathbb{P}$ un plan projectif.

a) Définir la notion de birapport de 4 points alignés distincts. Définir et jusitifier l'unicité du birapport de 4 droites concourantes distinctes.
b) Enoncer le théorème de Pascal et le théorème de Brianchon. Quel lien unit ces deux théorèmes ?
c) Soit d et d' deux droites distinctes du plan projectif $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, $P \in \mathbb{P}^2 \setminus \{d \cup d'\}$ et $h : d \longrightarrow d' : M \mapsto d' \cap (MP)$. Montrer que h est une homographie. (Aide : Soient F, F', W les sous vectoriels de $\mathbb{R}^3$ correspondant à d, d' et P respectivement. Montrer que la projection sur F' correspondant à la décomposition $\mathbb{R}^3 = F' \oplus W$ induit un isomorphisme de F sur F' dont l'homographie associée est h.).
d) Enoncer la propriété duale de c).

Exercice 1

Soient, dans le plan projectif, un triangle ABC et deux droites l et l' ne passant pas par les sommets du triangle. La droite l rencontre les côtés BC, CA, AB du triangle respectivement en P, Q, R. La doite l' les rencontre en P', Q', R'. On pose :

$$\begin{array}{ccc} K = QR' \cap BC & K' = RQ' \cap BC & K'' = QR' \cap RQ' \\ L = RP' \cap CA & L' = PR' \cap CA & L'' = RP' \cap PR' \\ M = PQ' \cap AB & M' = QP' \cap AB & M'' = PQ' \cap QP' \end{array}$$

Montrer que

(1) Les points K, L, M sont alignés sur une droite δ.
(2) Les points K', L', M' sont alignés sur une droite δ'.
(3) Les points K'', L'', M'' sont alignés sur une droite δ''.
(4) Les droites δ, δ' et δ'' sont concourantes.

Exercice 2

Si un quadrangle $PQRS$ est inscrit à une conique Γ, montrer que son triangle diagonal est autopolaire.

Exercice 3

Montrer que les homologies du plan projectif ayant même centre forment un groupe.

Exercice 4

a) Démontrer que l'intersection ainsi que la réunion de deux ensembles algébriques d'un même espace affine sont des ensembles algébriques.
b) Dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $\{(x, \sin x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est il algébrique ?