EXAMEN DE GEOMETRIE

MAITRISE-LICENCE DE MATHEMATIQUES

SEPTEMBRE 2002

QUESTIONS DE COURS

Question 1

Soit ABC un triangle non isocèle. On note $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$. Soit I_1 (resp. J_1) le point où la bissectrice intérieure (resp. extérieure) de $[\widehat{BAC}]$ coupe la droite (BC).

Démontrer que

$$\frac{\overline{I_1B}}{\overline{I_1C}} = -\frac{c}{b} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{J_1B}}{\overline{J_1C}} = \frac{c}{b}$$

En déduire que les trois bissectrices intérieures d'un triangle se coupent en un même point noté I. Montrer que I est le centre du cercle inscrit au triangle et que $I = bar(\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$.

Question 2

Soit E un espace affine euclidien. On note $Ga(E)$ et $GL(E)$ respectivement les groupes affine et linéaire de E. On considère l'application $\Phi : Ga(E) \longrightarrow GL(E) : f \mapsto \overrightarrow{f}$.

a) Montrer que Φ est un morphisme de groupes.

b) Déterminer géométriquement le noyau de Φ.

c) Montrer que l'image réciproque $\Phi^{-1}(E)$ de l'ensemble $E = \{$homothéties vetcorielles de $\overrightarrow{E}\}$ est un sous-groupe normal de $GA(E)$. Comment s'appelle ce sous-groupe ?

!!! FEUILLE SÉPARÉE !!! FEUILLE SÉPARÉE !!! FEUILLE SÉPARÉE !!!

Question 3 (géométrie projective)

Soient d et d' deux droites d'un plan projectif.

a) Donner la définition d'une homographie $d \to d'$.

b) Donner la définition d'une perspective $d \to d'$.

c) Démontrer que chaque homographie $d \to d'$ est la composée de deux perspectives. Dans la démonstration, donner les énoncés complets des résultats utilisés.

Question 4 (géométrie algébrique)

a) Donner la définition d'un espace topologique *irréductible*.

b) Démontrer qu'un ensemble algébrique Y d'un espace affine X est irréductible si et seulement si l'idéal $I(Y) \subset F[X]$ est un idéal premier.

c) Donner deux exemples d'ensembles algébriques irréductibles (en expliquant pourquoi ils le sont).

EXERCICES

Exercice 1 (corrigé en TD)

Démontrer le théorème de Ménélaüs: Soit ABC un triangle non aplati et P, Q, R des points des droites (BC), (CA) et (AB) distincts des sommets. Alors P, Q, R sont alignés si et seulement si

$$\frac{\vec{PB}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{QC}}{\vec{QA}} \cdot \frac{\vec{RA}}{\vec{RB}} = 1 \ .$$

Exercice 2 (non corrigé en TD)

Pour l'application $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(x, y, z) = (x', y', z')$, définie ci-dessous, vérifier qu'elle est une isométrie et déterminer son type et éléments caractéristiques. En plus, déterminer le type et les éléments caractéristiques de l'opérateur orthogonal $\vec{f}$:

$$x' = y - 1$$
$$y' = z + 3$$
$$z' = x - 2$$