EXAMEN DE GEOMETRIE

MAITRISE-LICENCE DE MATHEMATIQUES

septembre 2001

QUESTION DE COURS

Soit ABC un triangle non rectangle et I, J, K les pieds des hauteurs issues de A, B, C. On note H l'orthocentre et O le centre du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle ABC.

a) Montrer que les paires de droites $\{(AB), (AC\}$ et $\{(AH), (AO)\}$ ont les mêmes bissectrices.

b) On suppose que les trois angles du triangle ABC sont aigus. Montrer que le point I appartient au segment $[BC]$ privé de B et C.

EXERCICE 1

Soit $\{(A_i, \alpha_i)\}_{i=0}^n$ un système de $n+1$ points pondérés d'un espace affine. On note G_1 l'isobarycentre de ce système (On suppose que $\sum_{i=0}^n \alpha_i \neq 0$).

a) On considère l'homothétie $h := h_{A_0,\lambda}$ de centre A_0 et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On note G' l'isobarycentre du système $\{(h(A_i), \alpha_i)\}_{i=0}^n$. Calculer $h(G)$ en fonction des éléments ci-dessus.

b) Soit G_2 l'isobarycentre du système $\{A_i, \alpha_i^2\}_{i=0}^n$. Montrer que

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \overrightarrow{G_1 A_i} = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i^2}{\sum_{i=0}^n \alpha_i} \sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{A_i G_2}$$

.

EXERCICE 2

Soit X un espace affine réel de dimension n.

a) Montrer qu'un produit d'homothéties est une translation (déterminer son vecteur) ou une homthétie (déterminer son centre et son rapport)

b) On suppose $n = 2$. Soient $\{a_1, a_2, a_3\}$ un repère affine, a'_i le milieu de $\{a_j, a_k\}$ ($i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ distincts) et g l'isobarycentre des trois points $\{a_1, a_2, a_3\}$. Soient m un point du plan et m_i le symétrique de m par rapport à a'_i. Montrer que $\{m_1, m_2, m_3\}$ est l'image de $\{a_1, a_2, a_3\}$ par une homthétie dont le centre est sur la droite gm

c) Montrer que les droites $a_i m_i$ se coupent en leur milieu.

EXERCICE 3

Soit $\alpha : d \longrightarrow d$ une bijection d'une droite projective qui admet deux points fixes P et Q distincts. Montrer que cette bijection est une homographie si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout point $M \in d$, différent de P et Q, on a la relation $(P, Q, M, \alpha(M)) = k$. Caractériser les homographies de d telles que $k = -1$.