EXAMEN DE GÉOMÉTRIE FONDAMENTALE

LICENCE DE MATHÉMATIQUES

septembre 2003; Durée 3 heures.

QUESTION DE COURS

A) Montrer que l'ensemble des homothéties et des translations d'un plan affine forme un groupe (appelé le groupe des homothéties-translations).

B) Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles vérifiant $(AB)//(A'B')$; $(AC)//(A'C')$; $(BC)//(B'C')$. Montrer qu'il existe une homothétie-translation h telle que $h(A) = A'$; $h(B) = B'$; $h(C) = C'$.

EXERCICE 1

Soit P un plan affine euclidien, $p, q \in P$ deux points distincts. On note $\mathcal{R}_p$ les rotations de centre p. On note G le sous groupe de $Is^+(P)$ engendré par $\mathcal{R}_p$ et $\mathcal{R}_q$ et $R = d(p,q)$.

a) Soient $r \in \mathcal{R}_p$ et $\rho \in \mathcal{R}_q$. Montrer que l'application $f = \rho^{-1} \circ r \circ \rho$ est une rotation et déterminer son centre. En déduire que, si $a \in P$ est tel que $d(a,q) = R$, alors $\mathcal{R}_a \subset G$.

b) Montrer que G contient $\mathcal{R}_a$ pour tout $a \in P$ tel que $d(a,q) < R$. (Aide passer par un point intermédiaire $b \in P$ situé sur la médiatrice de $[qa]$ et tel que $d(q,b) = R$. Utiliser alors a) en remplaçant (p,q) par (q,b), faire un dessin).

c) Montrer par induction sur $n \in \mathbb{N}$ que si $d(a,q) \leq nR$ alors $\mathcal{R}_a \subseteq G$ (Aide : si $a \in P$ est tel que $nR < d(q,a) \leq (n+1)R$, considérer les points $b = q + \frac{nR}{d(a,q)}\overrightarrow{qa}$ et $c = q + \frac{(n-1)R}{d(a,q)}\overrightarrow{qa}$, faire un dessin). Conclure que G contient toutes les rotations de P.

d) Prouver que $G = Is^+(P)$.

EXERCICE 2

On suppose $cark \neq 2$. On dit que b est isotrope ssi il existe $0 \neq v \in V$ tel que $b(v,v) = 0$. On appelle (V,b) un plan hyperbolique si $dimV = 2$ et la matrice de b dans une base convenable est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'une forme non dégénérée b est isotrope ssi il existe un sous-espace $U \subseteq V$ tel que $(U, b|_U)$ est un plan hyperbolique. En déduire qu'il existe une décomposition orthogonale $V = U_1 \bigoplus U_2 \cdots \bigoplus U_r \bigoplus W$ telle que chaque $(U_i, b|_{U_i})$ est un plan hyperbolique tandis que $b|_W$ est anisotrope (c'est à dire non isotrope) (Aide : on pourra utiliser la propriété suivante : si $U \subseteq V$ un sous espace de V, $V = U \bigoplus U^\perp$ ssi la restriction $b|_U$ de b à U est non dégénérée).

EXERCICE 3

Dans l'espace affine euclidien usuel E_3 muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, étudier l'application f associant au point $M(x,y,z)$ le point $M'(x',y',z')$ où

$$\begin{array}{rrrrr} 3x' = & -2x & -2y & +z & -5 \\ 3y' = & -2x & +y & -2z & -2 \\ 3z' = & x & -2y & -2z & +1 \end{array}$$