GÉOMÉTRIE FONDAMENTALE

Licence de mathématiques ; Septembre 2004

QUESTIONS DE COURS

A. Soient ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Soit P un point quelconque du plan dont les projetés othogonaux sur les droites $(BC), (CA)$ et (AB) sont respectivement P_1, P_2, P_3. On rappelle que P_1, P_2, P_3 sont alignés si et seulement si $P \in \mathcal{C}$ (Ne pas démontrer cela) Cette droite est appelée la droite de Simson et notée Δ_P. On suppose donc $P \in \mathcal{C}$ et on pose $Q_1 = S_{BC}(P), Q_2 = S_{AC}(P), Q_3 = S_{AB}(P)$.
   a) Montrer que Q_1, Q_2, Q_3 sont alignés sur une droite $\mathcal{D}_P$ paralléle à Δ_P.
   b) On suppose $P \in \mathcal{C} \setminus \{A, B, C, H_1 = S_{BC}(H)\}$ où H est l'orthocentre du triangle ABC et on pose $Q = (PP_1) \cap \mathcal{C}$. Si (PP_1) est tangente à $\mathcal{C}$, on pose $Q = P$. Démontrer : $\overline{(AQ, PP_1)} = \overline{(\Delta_P, PP_1)}\,(mod\pi)$. En déduire que (AQ) est parallèle à Δ_P.

B. Enoncer (ne pas démontrer) le théorème de Cartan-Dieudonné (décomposition des isométries). Que peut-on dire dans le cas des retournements ?

Exercice Soit E un espace affine euclidien de dimension finie. Montrer que si f est une similitude de E de rapport $\lambda \neq 1$, alors f a un point fixe unique C (appelé centre de la similitude). Montrer que f s'écrit comme produit commutatif d'une homothétie de centre C et d'une isométrie admettant C comme point fixe.

Problème Soit E un espace affine euclidien de dimension n, O un point de E et r un réel positif. $S(O, r) := \{M \in E | d(O, M) = r\}$ est appelé la sphère de centre O et de rayon r.

A. 1) Pour $M \in E$, $P(M) := d(O, M)^2 - r^2$ est appelé puissance de M par rapport à la sphère $S(O, r)$. Si D est une droite affine passant par M et coupant $S(O, r)$ en A et B, montrer que $P(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.
   2) Si $S(O, r)$ et $S(O', r')$ sont deux sphères, on désigne par $P(M)$ et $P'(M)$ la puissance du point $M \in E$ par rapport respectivement à $S(O, r)$ et $S(O', r')$. Montrer que l'ensemble $\{M \in E \mid P(M) = P'(M)\}$ est un hyperplan affine de E perpendiculaire à la droite (OO'). Cet hyperplan s'appelle l'hyperplan radical des deux sphères (si $n = 2$ on dit l'axe radical des deux cercles).
   3) Soient A, B, C, D quatre points non alignés d'un plan affine euclidien tels que les droites (AB) et (CD) se coupent en un point M. Montrer que A, B, C, D appartiennent à un même cercle si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$.

B. Soient A, B, C, D, E, F les sommets d'un quadrilatère complet d'un plan réel euclidien (voir figure).
   1) Soient P, Q, R les pieds des hauteurs du triangle BCE situés respectivement sur les côtés (BC), (CE) et (EB) et H l'orthocentre de ce triangle. Montrer que H a même puissance par rapport aux cercles de diamètres $[BD], [AC]$ et $[EF]$ (Aide remarquer que ces cercles passent respectivement par Q, R, P)
   2) Montrer que les orthocentres des triangles ADE, AFB et DFC ont aussi même puissance par rapport aux trois cercles de 1).
   3) Montrer que les triangles BCE, ADE, AFB et DFC ont leurs orthocentres alignés sur une droite orthogonale à la droite qui passe par les milieux des diagonales (BD), (AC) et (EF) du quadrilatère.

C. On appelle inversion de pôle O et de puisssance $k \in \mathbb{R}^*$, l'application $I_{O,k} : E \setminus \{O\} \longrightarrow E : M \mapsto M'$ où $\overrightarrow{OM'} = k \frac{\overrightarrow{OM}}{||\overrightarrow{OM}||^2}$.

1) Montrer que $I_{O,k}^2 = Id_{E \setminus \{O\}}$.
2) Montrer que, si $k > 0$, $\{M | I_{O,k}(M) = M\}$ est une sphère de centre O et de rayon k.
3) On suppose $n = 2$. Soit D une droite ne passant pas par O. Soit H la projection orthogonale de O sur D. Montrer que $I_{O,k}(D)$ est un cercle de diamètre $[OH']$ privé du point O. Enoncer et prouver une réciproque.