MAITRISE DE MATHEMATIQUES II

Théorie des Anneaux ; janvier 2006

Questions de cours

1. Donner 5 caractérisations des anneaux semi-simples.
2. Définir les notions de dimension uniforme d'un module, de sous-module dense,de sous-module essentiel, de module injectif.
3. Que peut-on dire de $udimR_R$ si R est un anneau intègre de Ore à droite.
4. Montrer qu'un module injectif est divisible. Montrer que l'anneau $R := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n > 1$, est auto-injectif (i.e. R_R est injectif).

Exercice 1

A) Soit $R[t]$ l'anneau des polynômes sur un anneau commutatif R.

1. Si R est intègre, quels sont les éléments inversibles de $R[t]$?
2. Si $f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in R[t]$ est inversible et P est un idéal premier de R, montrer que $\sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} t^i \in (R/P)[t]$ est inversible.
3. Conclure que si R est commutatif alors $f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in R[t]$ est inversible si et seulement si a_0 est inversible dans R et a_i est nilpotent pour tout $i \geq 1$.

B) On suppose $Jac(R[t]) \neq 0$ (on ne suppose plus R commutatif). Soit $f(t) = \sum_{i=1}^{r} a_i t^{n_i} \in Jac(R[t])$ tel que $a_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$ et tel que r soit minimal parmi les éléments non nuls de $Jac(R[t])$ ($n_1 < n_2 < \cdots < n_r$).

1. On considère tous les éléments de $Jac(R[t])$ qui sont de la même forme que f et l'on pose :

$$\mathcal{A} := \{a \in R \mid \exists a_2, \ldots, a_r \in R \text{ tel que } at^{n_1} + a_2 t^{n_2} \ldots a_r t^{n_r} \in Jac(R[t])\}.$$

   Montrer que $\mathcal{A}$ est un idéal de R.
2. En considérant $fa_i - a_i f$, montrer que $a_i a_j = a_j a_i$ pour tout $1 \leq i,j \leq r$. Soit R_0 le sous anneau de R engendré par $a_1, \ldots, a_r$.
3. Montrer qu'il existe $g \in R[t]$ tel que $(1+g)(1-ft) = 1$ et en déduire que pour tout $n \geq 1$ on a

$$g = ft + f^2t^2 + \cdots + f^n t^n + g f^n t^n \qquad (1)$$

4. Considérer alors l'équation (1) ci-dessus pour $n > deg(g)$ et conclure que $g \in R_0[t]$.
5. Utiliser les résultats de A) ci-dessus pour conclure que $\mathcal{A}$ est nil.

C) Déduire de ce qui précède que si R est un anneau sans idéal nil non nul alors $R[t]$ est semi-primitif.

Exercice 2

a) Le socle d'un R-module ${}_RM$ est par définition la somme de tous les sous-modules simples de M. Montrer que $Soc(M) \subseteq \{m \in M \mid Jac(R)m = 0\}$. Montrer que l'égalité est vraie lorsque $R/Jac(R)$ est un anneau artinien.

b) Montrer que $Soc({}_RR)$ est un idéal bilatère.

c) Si R est artinien à gauche montrer que $Soc({}_RR) = \{r \in R \mid Jac(R)r = 0\}$ et $Soc(R_R) = \{r \in R \mid rJac(R) = 0\}$.

1. Montrer que l'anneau $\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ est artinien à gauche et que $Soc({}_RR) \neq Soc(R_R)$

Problème

A) Soit R un anneau, montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes:

1. $\forall a \in R, \exists x \in R: \; a = axa$
2. Tout idéal à gauche principal est engendré par par un idempotent.
3. Tout idéal à gauche finiment engendré est engendré par un idempotent.
4. Tout idéal à gauche principal est un sommant direct de ${}_RR$.
5. Tout idéal à gauche finiment engnedré est un sommant direct de ${}_RR$.

Un anneau satisfaisant l'une des propriétés ci-desus est appelé un anneau von Neumann régulier.

B)1. Montrer qu'un anneau von Neumann régulier est semi-primitif.

2. Montrer qu'un anneau est semi-simple si et seulement si il est von Neumann régulier et noethérien à gauche (resp. à droite).
3. Montrer qu'un anneau R est von Neumann régulier si et seulement si tout R-module à droite est divisible.
4. Montrer qu'un anneau commutatif R est von Neumann régulier si et seulement si R est réduit et tout idéal premier de R est maximal si et sseulement si pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de R la localisation de R par rapport à $R \backslash \mathfrak{M}$ est un corps.
5. Conclure de 4. ci-dessus qu'un anneau commutatif R est von Neumann régulier si et seulement si tout R-module simple est injectif.

C)1. Soit M un A-module semi-simple et $f \in R := End_A(M)$. On pose $K = ker(f)$ et $L = f(M)$. Montrer qu'il existe K',L' des sous modules de M tels que $M = K \oplus K' = L \oplus L'$. Utiliser ceci pour définir $g \in End(M)$ tel que $fgf = f$. Conclure que R est von Neumann régulier. Donner un exemple d'anneau von Neumann régulier qui n'est pas semi-simple.

2. Soit k un corps commutatif et G un groupe localement fini (tout sous ensemble fini de G engendre un groupe fini). Si $x \in kG$ on note G_x le sous groupe de G engendré par le support de x. Montrer que kG_x est semi-simple et utiliser B2. ci dessus pour conclure que kG est von Neumann régulier.