EXAMEN D'ALGEBRE

MAITRISE DE MATHEMATIQUES

Janvier 2003

Questions de cours

1. Définir la notion de caractère induit, donner le théorème de réciprocité de Froebenius, indiquer deux manières de calculer le caractère induit par un sous-groupe H d'un groupe G.
2. Enoncer un résultat relatif aux produits de sommes de carrés qui peut se démontrer via la théorie des représentations de groupes. Esquisser comment on introduit cette théorie dans ce problème.

Exercice 1

Soit p et q des nombres premiers et G un groupe non abélien d'ordre pq. On suppose que $p > q$.

1. Donner les degrés de toutes les représentations irréductibles de G.
2. Montrer que $|G'| = p$.
3. Montrer que q divise $p - 1$ et que G possède $q + \frac{p-1}{q}$ classes de conjugaison.

Exercice 2

On rappelle qu'un caractère d'un groupe G est dit réel si $\chi(g) \in \mathbb{R}$ pour tout élément g de G. On dit aussi que la classe de conjugaison d'un élément g est réelle si elle coïncide avec celle de g^{-1}. Soit X la table des caractères de G considérée comme une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $\overline{X}$ s'obtient à partir de X par permutation de certaines lignes. En déduire qu'il existe une matrice de permutation P telle que $PX = \overline{X}$.
2. démontrer de même qu'il existe une matrice de permutation Q telle que $XQ = \overline{X}$.
3. Montrer que P et Q ont même trace et en déduire que le nombre de caractères irréductibles réels est égal au nombre de classes de conjugaison réelles.
4. Montrer que le groupe G possède un caractère irréductible non trivial réel si et seulement si l'ordre de G est pair.

Exercice 3

Soit G un groupe fini ayant r représentations irréductibles complexes.

1. Montrer que si $r = 2$, alors $G \cong \frac{Z}{2Z}$
2. Montrer que si $r = 3$, alors soit $G \cong \frac{Z}{3Z}$, soit $G \cong S_3$