EXAMEN D'ALGEBRE

MAITRISE DE MATHEMATIQUES

Janvier 2004

Questions de cours

1. Enoncer et démontrer le lemme de Schur (relatif aux endomorphismes d'un module simple).
2. Qu'est ce que la représentation régulière d'un groupe fini? Si χ est un caractère irréductible et χ_{reg} est le caractère associé à la représentation régulière , calculer $< \chi_{reg},\chi >$.
3. Enoncer un résultat relatif aux produits de sommes de carrés qui peut se démontrer via la théorie des représentations de groupes. Esquisser comment on introduit cette théorie dans ce problème.

Exercice 1

Soit $D_4 =< a,b \,|\, a^4 = b^2 = 1 \,, bab = a^3 >$

1. Que représente géométriquement ce groupe?
2. Donner les degrés de toutes les représentations irréductibles de D_4.
3. Trouver les classes de conjugaison de D_4.
4. Donner la table des caractères de D_4.

Exercice 2

Soit H un sous-groupe d'un groupe fini G et $x \in G$. Si $x_1^H,\ldots,x_n^H$ sont les classes de conjugaison dans H qui coupent la classe x^G non trivialement, montrer que, pour tout caractère ψ de H, on a

$$(\psi \uparrow G)(x) = |\, C_G(x) \,|(\sum_{i=1}^{n} \frac{\psi(x_i)}{|C_H(x_i)|})\,.$$

Exercice 3

Soit G un sous-groupe de S_n et $V := \oplus_{i=1}^{n}\mathbb{C}e_i$ un $\mathbb{C}$-vectoriel de base $\{e_1,\ldots,e_n\}$. On définit une action de S_n su V via

$$\forall\sigma \in S_n \;\forall i \in \{1,\ldots,n\} \quad \sigma.e_i := e_{\sigma(i)}$$

1. Expliquer comment cette action munit V d'une structure de $\mathbb{C}G$-module.
2. Montrer que la fonction $\phi : G \longrightarrow \mathbb{C} : g \mapsto |Fix(g)| - 1$ est un caractère de G.
3. Calculer les valeurs de ϕ si $G = S_4$ et montrer que dans ce cas ϕ est irréductible.