EXAMEN D'ALGEBRE

MAITRISE DE MATHEMATIQUES

Septembre 2003

Question de cours

1. Définir la notion de caractère, caractère irréductible, degré d'un caractère associé à une représentation d'un groupe.
2. Enoncer le théorème de Wedderburn et expliquer en quoi il est relié à la théorie des représentations d'un groupe fini.
3. Enoncer le théorème de réciprocité de Frobenius (relatif aux caractères induits)

Exercice 1

On rappelle qu'un anneau R est simple si ses seuls idéaux bilatères sont $\{0\}$ et R.

Soit k un corps commutatif et $A = k(x)[y; D]$ l'anneau des polynômes de Ore ($yf(x) = f(x)y + D(f(x))$ pour tout $f(x) \in k(x)$ et $D = d/dx$ est la dérivation usuelle des fractions rationelles en x.)

1. Montrer que si la caractéristique de k est nulle, alors A est simple de centre k.
2. Examiner le cas où la caractéristique de k est positive (simplicité et centre).

Exercice 2

Montrer que les représentations irréductibles d'un groupe commutatif fini sont de degré 1.

Exercice 3

On rappelle que D_n désigne le groupe diédral :

$$D_n =< a,b \,|\, a^n = b^2 = (ab)^2 = 1 >$$

.

Donner les tables de caractères des groupes D_4 et D_5.