EXAMEN D'ALGEBRE

MAITRISE DE MATHEMATIQUES

Septembre 2004

Questions de cours

1. Enoncer le théorème de Maschke et expliquer son rôle pour l'étude des représentations des groupes finis
2. Soit G un groupe simple fini, p un nombre premier et $a > 0$. Que peut-on dire des classes de conjugaison de G de cardinal p^a (ne rien démontrer). Enoncer le théorème de Burnside relatif aux groupes simples d'ordre $p^a q^b$, p,q premiers.

Exercice 1

Montrer que si G est un groupe simple non abélien alors G ne possède pas de sous-groupe abélien d'indice une puissance d'un premier.

Exercice 2

Soit G un groupe fini. On note G' le sous-groupe dérivé de G. (sous-groupe de G engendré par les commutateurs).

A. 1) Montrer que G' est un sous-groupe normal de G qui est contenu dans le noyau de tous les caractères de degré 1.
   2) Montrer que $(G : G')$ est égal au nombre de caractères irréductibles de degré 1.

B. On suppose que G est un groupe fini simple qui possède une représentation irréductible ρ de degré 2.
   1) Montrer que G ne possède aucun caractère non trivial de degré 1.
   2) Montrer que $det(\rho(g)) = 1 \quad \forall g \in G$ (det désigne le déterminant).
   3) Montrer que G possède un élément x d'ordre 2 (on rappelle que si 2 divise $|G|$ alors G possède un élément d'ordre 2).
   4) Montrer qu'il existe $T \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $T\ \rho(x)T^{-1} = -Id$.
   5) Montrer que x est central.
   6) Conclure qu'un groupe simple fini ne possède pas de caractère irréductible de degré 2.