1 actions de groupes

Exercice 1

Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. On fait agir G sur l'ensemble G/H des classes à droite de G modulo H de la manière suivante : pour $g \in G$ et xH une classe à droite modulo H on pose $g.(xH) = gxH$.

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une action et qu'elle est transitive.
2. Calculer le noyau de cette action (i.e. $\{g \in G | \forall x \in G\,,\, g.(xH) = xH\,\}$).
3. Pour $x \in G$, calculer $Stab(xH)$.
4. On suppose G fini, calculer le cardinal d'une orbite.

Exercice 2

Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que le centre d'un groupe d'ordre p^n est non trivial. En déduire que les groupes d'ordre p^2 sont abéliens.

Aide : faire agir le groupe sur lui-même par automorphismes internes et appliquer la formule des classes.

Exercice 3

Soit V un espace vectoriel de dimension n. Montrer que $GL(V)$ agit sur l'ensemble X des sous-espaces vectoriels de V. Déterminer l'orbite et le stabilisateur de $W \in X$. Combien existe-t-il d'orbites ?

Exercice 4

Soit X un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier. On considère la permutation circulaire $c = (1, \ldots ,p) \in \mathcal{S}_p$.

1. Montrer que l'on définit une action du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur X^p en posant : $\forall \overline{k} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\forall x = (x_1, \ldots ,x_p) \in X^p$, $\overline{k}.x = (x_{c^k(1)}, \ldots ,x_{c^k(p)})$.
2. En utilisant l'équation des classes retrouver le petit théorème de Fermat.
3. De même, retrouver encore ce résultat en utilisant la formule de Burnside.

Exercice 5

1. Soit G un groupe agissant transitivement sur $\Omega = \{1, \ldots ,n\}$ on note $N(g)$ le nombre de points qui sont fixés par g. Montrer que $\sum_{g \in G} N(g) = |G|$.
2. Un groupe G agissant sur un ensemble X est dit 2-transitif si $\forall (x,y) \in X^2\, \forall (x',y') \in X^2 \exists g \in G$ tel que $(g.x,g.y) = (x',y')$. On suppose maintenant que G est un groupe agissant de manière 2-transitive sur Ω. On pose, pour $i \in \Omega$, $G_i = stab(i)$ et $\Omega_1 = \Omega \setminus \{1\}$
   (a) Montrer que G_1 opère transitivement sur Ω_1.
   (b) Pour $x \in G_1$, on note $N'(x)$ le nombre de points de Ω_1 qui restent fixes lors de l'action de x. Montrer que $\sum_{x \in G_1} N'(x) = |G_1|$

(c) Montrer que $\sum_{x \in G_1} N(x) = 2|G_1|$, oú $N(x)$ désigne le nombre d'éléments de Ω fixés par x.

(d) En déduire que $\sum_{j=1}^{n} \sum_{x \in G_j} N(x) = 2n|G_1| = 2|G|$.

(e) En remarquant que, pour tout $x \in G$, x est contenu dans $N(x)$ sous groupes G_j, Montrer que

$$\sum_{g \in G} N(g)^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{x \in G_j} N(x) = 2|G| \,.$$

Exercice 6

Combien de colliers distincts peut-on fabriquer en utilisant 4 perles bleues, 3 perles blanches, 2 perles rouges?

Exercice 7

On considère une action non triviale de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur un ensemble X ayant p éléments. Montrer que l'action est transitive. Pour l'action sur $\mathcal{P}(X)$ qui en résulte, écrire l'équation des classes, la formule de Burnside...Commentaires?

Exercice 8

Montrer qu'une action simplement transitive est fidèle et transitive et que la réciproque est vraie lorsque le groupe est commutatif.

2 Géométrie affine

Exercice 9

On appelle droite affine d'un espace affine X, le sous espace affine engendré par deux points distincts de X. Soit a,b deux points de X.

1. Décrire la droite affine déterminée par les points a et b au moyen du vecteur $\overrightarrow{ab}$.
2. On appelle segment déterminé par les points a et b, l'ensemble des points de la droite ab déterminé par $\{Bar\{(a,t),(b,1-t)\} \,|\, t \in [0,1]\}$. On appelle milieu du segment $[ab]$, le barycentre $bar\{(a,1),(b,1)\}$ Soient a,b,c non alignés, et $a',b'c'$ les milieux des segments bc,ac,ab. Montrer que les droites aa',bb',cc' se coupent en un même point. Caractériser ce point.

Exercice 10

Soit X un espace affine, on considère $\{(a_1,\lambda_1),\ldots,(a_n,\lambda_n)\}$ n points pondérés de X. On pose $L : X \longrightarrow \overrightarrow{X} : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{xa_i}$. Montrer que

1. si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ alors est L est une application constante.
2. Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$ alors L est bijective. Caractériser alors le barycentre des points (a_i,λ_i) au moyen de L.
3. Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ et, pour une partition $\{1,\ldots,\} = I \cup J$ telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i \neq O$ on pose $G_1 = bar\{(a_i,\lambda_i) \,|i \in I\}$ et $G_2 = Bar\{(a_j,\lambda_j) \,|jinJ\}$. Montrer que si $G_1 \neq G_2$, la direction de $Aff\{G_1,G_2\}$ est indépendante du choix de la partition (I,J).

Exercice 11

Soient X_1,X_2 deux sous espaces affines d'un espace affine X. Montrer que

1. Si $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ alors $dim(Aff(X_1 \cup X_2)) = dim(\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2})$.
2. Si $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, alors $dim(Aff(X_1 \cup X_2)) = dim(\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}) + 1$.

Exercice 12

Soit X un espace affine, montrer qu'une partie non vide Y est un sous espace affine si et seulement si toute droite joignant deux points distincts de Y est incluse ans Y.

Exercice 13

Dans un espace affine de dimension 3 on considère quatre points non coplanaires a,b,c,d. On note $M_1,\ldots,M_4$ les milieux respectifs de ab,bc,cd,da.

1. Montrer que les points $M_1,\ldots,M_4$ sont dans un même plan.
2. Que peut on dire des milieux de ac et bd?

Exercice 14. Soit A,B,C,D 4 points non coplanaires d'un espace affine de dimension 3. On définit les points E,F,G par

$$E \text{ est le milieu de } AB,\ \overrightarrow{BF} = 2/3\overrightarrow{BC} \text{ et } G = Bar\{(C,1),(D,3)\}\,.$$

1. Donner les coordonnées barycentriques des points E, F, G dans le repère A, B, C, D.
2. Soient H,M,N trois points de l'espace affine. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées barycentriques dans le repère A,B,C,D pour
   (a) qu'un point M appartienne à la droite (EG).
   (b) pour qu'un point N appartienne à la droite (HF), H étant un point de la droite (AD).
3. Montrer qu'il existe un unique point H de (AD) tel que les droites (EG) et (HF) soient concourantes.

Exercice 15. Soient X un plan affine et A,B,C un repère affine. Soit trois droites

$$D(u,v,w),D(u',v',w'),D''(u'',v'',w'').$$

Posons

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}$$

1. $D \cap D'$ est un point si et seulement si $d \neq 0$. Dans ce cas ce point est $P(vw' - wv',wu' - uw',uv' - vu')$.
2. D est parallèle à D' ssi $d = 0$. Dans ce cas, et si $D \neq D'$, on a $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{D'}$ est engendré par le vecteur $a(vw' - v'w,wu' - uw',uv' - vu')$.
3. On suppose que deux au moins des trois droites D,D',D'' sont distinctes. Montrer que ces droites sont parallèles ou ont un point unique en commun ssi $\Delta = 0$.

Exercice 16. Soient A_1,A_2,A_3 un repère affine. On considère les points $P_1 = \lambda_{12}A_2 + \lambda_{13}A_3 \in (A_2A_3)$ $\quad P_2 = \lambda_{21}A_1 + \lambda_{23}A_3 \in (A_1A_3)$ $\quad P_3 = \lambda_{31}A_1 + \lambda_{32}A_2 \in (A_1A_2)$. Montrer que :

1. Les droites (A_iP_i) sont prallèlles ou concourantes si et seulement si

$$\lambda_{13}\lambda_{32}\lambda_{21} = \lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{31}.$$

2. Les points P_1,P_2,P_3 sont alignés si et seulement si

$$\lambda_{13}\lambda_{32}\lambda_{21} = -\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{31}.$$

Exercice 17.

On suppose $n = 2$. Soient $\{A_1,A_2,A_3\}$ un repère affine, $P_i \in (A_jA_k)$ et M_i le milieu de $[A_iP_i]$. Montrer que les M_i sont alignés si et seulement si les P_i le sont.

Exercice 18

Déterminer les applications affines f d'un espace affine X telles que $\overrightarrow{f} = id$.

Exercice 19

Soit f une application affine d'un espacce affine X dans lui-même. Montrer que

1. f est une projection si et seulement si $f^2 = f$.
2. f est une symétrie si et seulement si $f^2 = id$..

Exercice 20

Soit X un espace affine de dimension 2 et $\{P,Q,R\}$ un repère affine de X. Pour $A \in (QR)$ on note A' la projection de A sur (PR) parralèlement à $\overrightarrow{(PQ)}$ et A'' la projection de A' sur (PQ) parallèlement à $\overrightarrow{(QR)}$ et B la projection de A'' sur (QR) parralèlement à $\overrightarrow{(PR)}$.Expliciter l'application $s : (QR) \longrightarrow (QR) : A \mapsto B$.

Exercice 21

Soient $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, X un espace affine et u une application affine de X dans X . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x \in X \,, \overrightarrow{u}(\overrightarrow{xu(x)}) = \beta\overrightarrow{xu(x)}$.
2. $u^2 = (1+\beta)u - \beta Id$.
3. u est une affinité de base $F(u)$ parrallèlement à $ker(\overrightarrow{u} - \beta\overrightarrow{Id})$.

Utiliser ce résultat pour refaire l'exercice 19 ci-dessus.

Exercice 22

Soient X un espace affine et u une application affine de X dans X et D une droite de X. Pour $M \in D$ soit I le milieu de M et $u(M)$. Quel est le lieu de I quand M parcourt D?

Exercice 23

Soit X un espace affine de dimension n et u une application affine de X dans X. On désigne par $F(u)$ l'ensemble des points fixes de u.

1. Montrer que $F(u)$ est un sous espace affine de X, préciser sa direction.
2. si $n = 2$ et $F(u)$ est réduit à un point et u n'est pas une homothétie, montrer que c'est le produit de deux transvections ou d'une transvection et d'une affinité.
3. On suppose $n = 3$.
   a) Si $dim F(u) = 1$, montrer que u est le produit de deux transvections ou d'une transvection et d'une affinité.

b) Si $dimF(u) = 0$, montrer que u est le produit de trois transvections ou de deux transvections et d'une affinité

Exercice 24

Soit X un espace affine réel et C une partie de X. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

1. Le barycentre G de toute famille finie $\{(A_1,\lambda_1), \dots (A_n,\lambda_n)\}$ de points pondérés de C telle que $\lambda_1 \geq 0 \dots \lambda_n \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$,appartient à C.
2. $\forall M \in C \; \forall N \in C \; [MN] = \{M + \lambda \overrightarrow{MN} : 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq C$.

On dit qu'un ensemble X est convexe s'il vérifie les propositions équivalentes ci-dessus.

Exercice 25

Soient $C \subseteq X, C4 \subseteq X'$ deux sous ensembles d' espaxes affines réels et $f : X \longrightarrow X'$ une application affine. Montrer que

1. Si C est convexe alors $f(C)$ est un convexe.
2. Si C' est un convexe alors $f^{-1}(C')$ est convexe.

3 géométrie euclidienne

On suppose que V est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k, b une forme bilinéaire symétrique sur V.

Exercice 26

Montrer que l'application linéaire $\hat{b} : V \longrightarrow V^*, v \mapsto b_v$ où $b_v(u) = b(v,u)$ est un isomorphisme si et seulement si la forme b est non dégénérée.

Exercice 27

On suppose $cark \neq 2$. Montrer qu'une forme bilinéiare symétrique b sur V est complètement déterminée par ses valeurs $b(v,v), v \in V$. En particulier, si $b(v,v) = 0, \forall v \in V$, alors $b = 0$.

Exercice 28

Soit $U \subseteq V$ un sous espace de V, montrer que $V = U \bigoplus U^{\perp}$ ssi la restriction $b|_U$ de b à U est non dégénérée.

Exercice 29

On suppose $cark \neq 2$. On dit que b est isotrope ssi il existe $0 \neq v \in V$ tel que $b(v,v) = 0$. On appelle V,b un plan hyperbolique si $dimV = 2$ et la matrice de b dans une base convenable est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'une forme non dégénérée b est isotrope ssi il existe un sous-espace $U \subseteq V$ tel que $b|_U$ est une plan hyperbolique. En déduire qu'il existe une décomposition orthogonal $V = U_1 \bigoplus U_2 \cdots \bigoplus U_r \bigoplus W$ telle que chaque $b|_{U_i}$ est un plan hyperbolique tandis que $b|_W$ est anisotrope (c'est à dire non isotrope).

Exercice 30

Soit (V,b) une espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique. Si e désigne une base de V montrer que B est non dégénérée sis et seulement si dét$Gram_e b \neq 0$.

Exercice 31

Soit V un espace vectoriel euclidien et $u : V \longrightarrow V$ une application linéaire. Montrer que

a) $Ker(u^*) = u(V)^\perp$.

b) $Ker(u^*)^\perp = u(V)$.

Exercice 32

Une application linéaire $u : V \longrightarrow V$ d'un espace vectorel euclidien V est dite normale si $u \circ u^* = u \circ u^*$ (exemples : applications symétriques, applications orthogonales,...). Montrer que

a) $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

b) $ker(u) = ker(u^*)$.

c) $V = ker(u) \oplus u(E)$.

Exercice 33

Montrer qu'un opérateur orthogonal d'un d'un espace vectoriel euclidein de dimension 2 ayant un vecteur non nul fixe est soit l'dentité soit la réflexion par rapport à une droite.

Exercice 34

Existe-t-il une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{R})$ tel que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^t \quad ?$$

Exercice 35

On considère un espace vectoriel euclidien V (sur $\mathbb{R}$). Soit $u \in End_{\mathbb{R}}(V)$ et W un sous espace de V. On dit que W est stable par u si $u(W) \subseteq W$. Un sous espace est dit irréductible s'il est minimal parmi les sous-espaces stables de V.

1. Montrer que tout sous-espace irréductible est de dimension 1 ou 2.
2. Montrer que si les sous-espaces stables par u et u^* sont les mêmes alors V est la somme directe orthogonale de sous-espaces irréductibles.
3. Montrer qu'un opérateur u est symétrique (i.e. $u = u^*$) si et seulement si il existe une base orthonormale de V constituée de vecteurs propres pour u.

Exercice 36

Une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est dite symétrique définie positive si elle définie un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, i.e. si et seulement si pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, ${}^t vAv \geq 0$, l'égalité n'ayant lieu que si $v = 0$.

1. Montrer qu'une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive si et seulement si il existe une matrice $C \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $a =^t CC$.
2. Montrer que si A est une matrice symétrique réelle alors il existe une matrice orthogoanle P telle que PAP^{-1} soit diagonale.
3. Soit $A_1 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive et A_2 une matrice symétrique rélle. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t PA_1P = I_n$ et ${}^t PA_2P$ est diagonale.
4. Soient $A_1,A_2M_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques définies et positives. Montrer que, si $\lambda \in [0,1]$, alors on a

$$\det(\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2) \geq (\det A_1)^\lambda(\det A_2)1-\lambda.$$

Exercice 37

On note $Tr(A)$ la trace d'une matrice.

1. Montrer que l'application $\phi : M_n(\mathbb{R})^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ :\ (A,B) \mapsto Tr({}^t AB)$ est un produit scalaire.
2. Montrer que les sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques sont orthogonaux et supplémentaires pour ce produit scalaire.

Exercice 38

Soient u un opérateur orthogonal et $p = dim(F(u))$. On suppose que u s'écrit comme le produit de k réflexions s_i par rapport à des hyperplans H_i : $u = s_1 \circ \cdots \circ s_k$.

1. Montrer que $H_1 \cap \cdots \cap H_n \subseteq F(u)$.
2. En déduire que $n - p \leq k$, et que si l'égalité a lieu alors $H_1 \cap \cdots \cap H_k = F(u)$.

Exercice 39

f un endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien V tel que

$$\forall x \in V\ < f(x),x >= 0.$$

Montrer que $Kerf$ et Imf sont orthogonaux supplémentaires.

Exercice 40

Soit E un espace affine euclidien et f une apllication de E non constante. Montrer que f est une similitude si et seulement si

$$\forall x,x'y,y' \in E \quad 2\,\text{à}\,2\,\text{distincts on a} \quad \frac{||\overrightarrow{f(x)f(y)}||}{||\overrightarrow{f(x')f(y')}||} = \frac{||\overrightarrow{xy}||}{||\overrightarrow{x'y'}||}.$$

Exercice 41

Montrer que si f est une similitude de E de rapport $\lambda \neq 1$, alors f a un point fixe unique c (appelé centre de similitude). Montrer que f s'écrit de manière unique comme produit commutatif d'une homothétie de centre c et d'une isométrie admettant c comme point fixe.

Exercice 42 (théorème de Napoléon)

On considère trois points non alignés a,b,c du plan affine euclidien P. On construit les points a',b',c' tels que les triangles abc', acb', cab' soient équilatéraux. On désigne par u,v,w les isobarycentres de ces triangles.

1. Montrer que aa' = bb' = cc'.
2. Montrer que le triangle uvw est équilatéral.

(Aide pour la bataille : en 1) penser aux rotations , en 2) aux similitudes...)

Exercice 43

Soient E un espace affine euclidien et f une isométrie de E. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes:

1. $\overrightarrow{f^*} = \overrightarrow{f}$.
2. $\overrightarrow{f^2} = id_{\overrightarrow{E}}$.
3. Il existe $\overrightarrow{a} \in \overrightarrow{E}$ et une symétrie orthogonale s tels que $f = t_{\overrightarrow{a}} \circ s$.
4. Il existe un sous espace affine $F \subseteq E$ et $\overrightarrow{b} \in \overrightarrow{F}$ tels que $f = t_{\overrightarrow{b}} \circ s_F$.
   Montrer que la décomposition obtenue en 4 est unique et que $t_{\overrightarrow{b}}$ et s_F commutent.

Exercice 44

Dans l'espace affinne euclidien usuel E_3 muni d'un repère orthonormal $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, étudier l'application f associant au point $M(x,y,z)$ le point $M(x',y',z')$ où

1.
$$\begin{array}{rrrrr} x' = & & -\sqrt{2}/2y & -\sqrt{2}/2z & \\ y' = & -\sqrt{2}/2x & -1/2y & +1/2z & +2 \\ z' = & -\sqrt{2}/2x & +1/2y & -1/2z & -1 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rrrrr} x' = & -1/3x & +2/3y & +2/3z & +1 \\ y' = & 2/3x & -1/3y & +2/3z & -1 \\ z' = & 2/3x & 2/3y & -1/3z & -1 \end{array}$$

Aides

Exercice 1

2 Le noyau est $\cap_{x\in G} xHx^{-1}$. C'est le plus grand sous-groupe normal de G contenu dans H.
3 $Stab(xH) = xHx^{-1}$
4 Puisque $|Stab(xH)| = |H|$ on trouve que le cardinal de l'orbie de xH est $(G : H)$.

Exercice 2

Il suffit d'appliquer la formule des classes. Pour les groupes d'ordre p^2, le centre $Z(G)$ est non trivial, considérer alors $G/Z(G)$.

Exercice 3

L'orbite de $W \in X$ est l'ensemble des sous-vectoriels de mê me dimension que W. Le stabilisateur de W est l'ensemble des isomorphismes de V qui laisse stable W. Si on choisit $\{e_1, \ldots, e_l\}$ une base de W que l'on étend en une base e de V, les matrices dans cette base e des éléments du stabilisateur seront de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Oú A et C sont des matrices $l \times l$ inversibles (car $det(M) = det(A)det(C)$).

Exercice 4

2 L'orbite de $x = (x_1, \ldots, x_p)$ est réduite à un point si et seulement si $x_1 = x_2 \ldots, = x_p$. Il y a donc exactement n orbites ponctuelles. Le cardinal des orbites non ponctuelles divisent p et est donc égale à p. Si on désigne par l le nombre d'orbites, l'équation des classes donne :

$$n^p = |X^p| = n + (l - n)p$$

ce qui montre que $n^p \equiv n \ (mod\, p)$.

3 On remarque que si $\overline{k} = \overline{0}$ alors tout élément de X^p est fixé par l'action de $\overline{k}$. On a donc $|\mathcal{F}_{\overline{O}}| = n^p$ et on voit facilement que, si $\overline{g} \in \mathbb{Z}_p \setminus \{\overline{0}\}$, alors $|\mathcal{F}_{\overline{g}}| = n$. En notant encore l le nombre d'orbites on obtient par la formule de Burnside que

$$lp = \sum_{g\in\mathbb{Z}_p} |\mathcal{F}_g| = n^p + n(p-1)$$

Exercice 5

1 C'est la formule de Burnside.

2 a) C'est clair à cause de la 2-transitivité.
b) C'est clair par le point 1 . ci-dessus.
c) C'est clair car, pour $x \in G_1$, $N(x) = N'(x) + 1$.
d) On a les mêmes relations pour tous les autres G_j, et en sommant sur j on obtient l'égalité voulue.
e) $N(x)$ est compté une fois pour chaque sous groupe G_j qui contient x. Or x laisse fixe $N(x)$ points et par conséquent il est contenu exactement dans $N(x)$ sous-groupe G_j. Cela signifie que dans la somme de gauche chaque élément de G contribue pour $N(x)^2$. Le membre de gauche de l'équation en (d) est donc égale à $\sum_{g \in G} N(g)^2$ (en effet, les éléments x qui n'appartiennent à aucun G_j sont tels que $N(x) = 0$).

Exercice 6

Sur le cercle on "réserve" neuf emplacements possibles régulièrement espacés, $A_0, \ldots, A_9$, pour mettre les perles. Soit P l'ensemble de ces emplacements. Un collier correspond à une particition de P en trois blocs (4,3,2). Il y a $\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$ telles partitions. Soit X l'ensemble de ces partitions de P. Les symétries du 9-gone régulier transforment un collier en lui-même. Le nombre de colliers distincts est donc le nombre d'orbites de X sous l'action du groupe diédral D_9. On utilise la formule de Burnside pour trouver le nombre d'orbites. Soit $g \in D_9$, on désigne par $\mathcal{F}_g$ les éléments de X fixés par g et on pose $N(g) = |\mathcal{F}_g|$. Trois cas se présentent

i. Si $g = id$, alors $N(g) = 1260$
ii. Si g est une rotation r^k , $0 < k \leq 8$ alors... $\mathcal{F}_g = \emptyset$, i.e. $N(g) = 0$.
iii. Si g est une symétrie, par exemple autour de la droite (OA_0) alors en A_0 il y a nécessairement une perle blanche (car les parties invariantes par g sont réunions de couples de points symétriques (distincts si on excepte A_0)). Donc dans la partition invariante par g la partie qui contient A_0 est d cardinal impair. Pour constituer un collier il suffit de placer comme on le voudra, 2 perles bleues, 1 perle blanche et une perle rouge en A_1,A_2,A_3,A_4, puis de compléter le collier par symétrie par rapport à (OA_0). Cela laisse $\frac{4}{2!1!1!} = 12$ possibilités.

La formule de Burnside donne alors le nombre d'orbites : $\frac{1}{18}(1260 + 12 \times 9) = 76$.