Chapitre 1

Actions de groupes et géométries

1.1 Actions de groupes

Définitions 1.1.1. 1. Un groupe G **agit** sur un ensemble X s'il existe un morphisme de groupes $\phi : G \longrightarrow S_X$, où S_X désigne le groupe des permutations de l'ensemble X. Pour $g \in G$ et $x \in X$, on note $g.x := \phi(g)(x)$.

2. Si $x \in X$, **l'orbite** de x, notée $\mathcal{O}_x$, est l'ensemble $\{y \in X | \exists g \in G : g.x = y\}$.
3. Si $x \in X$, on note G_x le **sabilisateur** de x, c'est-à-dire $\{g \in G | g.x = x\}$.

On résume, dans la proposition suivante, les propriétés essentielles des actions de groupes.

Proposition 1.1.2. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X.*

1. *Pour tout $(g,g') \in G^2$ et pour tout $x \in X$, on a*
$$(gg').x = g.(g'.x) \text{ et } 1_G.x = x\,.$$
2. *Pour tout $x \in X$, G_x est un sous groupe de G.*
3. *Les orbites forment une partition de X.*
4. *Pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_x$ est en bijection avec l'ensemble quotient G/G_x, en particulier, si G est fini, $|\mathcal{O}_x| = (G : G_x)$.*
5. *On suppose G et X finis, alors $|X| = \sum_{t\in T} |\mathcal{O}_t| = \sum_{t\in T}(G : G_t)$. Où T désigne une tranversale de l'ensemble X, c'est-à-dire un sous-ensemble de X contenant un élément et un seul de chacune des orbites pour l'action de G (Ceci est appelé l'équation des classes).*
6. *Si $(x,y) \in X^2$ et $g \in G$ sont tels que $y = g.x$, alors $G_y = gG_xg^{-1}$.*
7. *On suppose G et X finis. Notons X/G l'ensemble des orbites de X pour l'action de G et posons , pour $g \in G$, $F_g := \{x \in X | g.x = x\}$. On a $|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |F_g|$. Cette formule porte le nom de formule de Burnside-Frobenius.*

Démonstration. Pour le point 7 on calcule le cardinal de l'ensemble

$$E = \{(g,x) \in G.X \,|\, g.x = y\}$$

de deux manières et on utilise le point 5 et le point 4. □

Définitions 1.1.3. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X, on dit que G agit de manière **transitive** si

$$\forall (x,y) \in X^2 \,, \exists\, g \in G \,, y = g.x \,.$$

G agit de manière **simplement transitive** si

$$\forall (x,y) \in X^2 \,, \exists !\, g \in G \,, y = g.x \,.$$

G agit **fidèlement** sur X si

$$\forall (g,g') \in G^2, \forall x \in X, g.x = g'.x \Rightarrow g = g' \,.$$

X est un **espace homogène** si G agit fidèlement et transitivement sur X .

Chapitre 2

Géométrie affine

2.1 Espaces affines

Définition 2.1.1. Un espace affine est la donnée d'un ensemble X, d'un espace vectoriel $\overrightarrow{X}$ et d'une action ϕ de $\overrightarrow{X}$,+ sur X fidèle et simplement transitive.

La dimension d'un espace affine X est la dimension de son espace vectoriel associée $\overrightarrow{X}$.

Proposition 2.1.2. *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1. $(X,\overrightarrow{X},\phi)$ *est un espace affine.*
2. *il existe une application* $f : X^2 \longrightarrow \overrightarrow{X}$ *telle que, et notant* $f((x,y)) = \overrightarrow{xy}$ *for* $(x,y) \in X^2$, *on a*
   a) $\forall x \in X, \forall \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{X}, \exists y \in X$ *tel que* $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{v}$.
   b) $\forall (x,y) \in X^2, \overrightarrow{xy} = \overrightarrow{0}$ *si et seulement si* $x = y$.
   c) $\forall (x,y,z) \in X^3, \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$ (Chasles).
3. *Pour tout* x *dans* $\overrightarrow{X}$, *il existe une bijection* $f_x : X \longrightarrow \overrightarrow{X} : y \mapsto \overrightarrow{xy}$ *telle que :*
$$\forall (x,y,z) \in X^3,\ \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}.$$

Notation 2.1.3. Pour $x \in X$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{X}$, on notera le résultat de l'action de $\overrightarrow{v}$ sur x par $x + \overrightarrow{v}$. En utilisant les notations du point *2* de 2.1.2 on obtient, pour $(x,y) \in X^2$, l'écriture commode :

$$y = x + \overrightarrow{xy}\,.$$

Exercices 2.2.4
Soient $(x,y,z,t) \in X^4$ ($\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \overrightarrow{X}$). Montrer que :

1. $x + (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = (x + \overrightarrow{a}) + \overrightarrow{b}$.
2. $\overrightarrow{xy} + (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = \overrightarrow{(x + \overrightarrow{a})(y + \overrightarrow{b})}$.

3. $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{zt} \Leftrightarrow \overrightarrow{xz} = \overrightarrow{yt}$.

Exemples 2.1.5.
1. Soient X un ensemble, V un vectoriel et $f : X \longrightarrow V$ une bijection. On peut alors munir X d'une structure d'espace affine en posant $\overrightarrow{xy} = f(y) - f(x)$. En particulier, si $X = V$ et $f = Id.$, on peut munir V lui même d'une structure d'espace affine.
2. On considère un système de p-équations linéaires à n inconnues sur un corps K:
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j\,, \quad 1 \leq i \leq p\,, \quad a_{ij} \in K\,.$$
Soit S l'ensemble des solutions de ce système c'est à dire l'ensemble: $\{x \in K^n \,|\, Ax = b\}$ oú $A = (a_{ij}) \in M_{p,n}(K)$. Soit aussi S_0 le sous vectoriel de K^n formé par les solutions de l'équation $Ax = 0$. On vérifie que (S,S_0) est un espace affine.

Définitions 2.1.6. Soit $(X,\overrightarrow{X})$ et $(Y,\overrightarrow{Y})$ des espaces affines.
1. Un sous-espace affine (sous-variété linéaire affine) est un sous ensemble de X de la forme $x_0 + \overrightarrow{Z}$ où $\overrightarrow{Z}$ est un sous espace de $\overrightarrow{X}$ et $x_0 \in X$.
2. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est affine s'il existe une application linéaire $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{X} \longrightarrow \overrightarrow{Y}$ telle que:
$$\forall (x_1,x_2) \in X^2\,, \quad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_1x_2}) = \overrightarrow{f(x_1)f(x_2)}\,.$$
3. Un système de points pondérés de X est un ensemble fini $\{(x_1,\alpha_1),\ldots,(x_n,\alpha_n)\} \subseteq (X \times K)^n$.
4. Soit le système de points pondérés $\{(x_1,\alpha_1),\ldots,(x_n,\alpha_n)\} \subseteq (X \times K)^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. On appelle barycentre d'un tel système un point G de X tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i\overrightarrow{Gx_i} = \overrightarrow{0}$. On écrira $G = Bar\{(x_i,\alpha_i)\}$.

Proposition 2.1.7. *Soient X un espace affine sur un corps k et un système $\{(A_i,\lambda_i)\}_{i=1}^n$ de points pondérés de X tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$.*

a) Les propriétés suivantes sont équivalentes:
- *(a) G est le barycentre du système $\{(A_i,\lambda_i)\}_{i=1}^n$.*
- *(b) $\exists A \in X \;:\quad (\sum_i \lambda_i)\overrightarrow{AG} = \sum_i \lambda_i\overrightarrow{AA_i}$.*
- *(c) $\forall A \in X \quad (\sum_i \lambda_i)\overrightarrow{AG} = \sum_i \lambda_i\overrightarrow{AA_i}$.*

b) $\forall \lambda \in k\,, \quad Bar\{A_i,\lambda_i\} = Bar\{A_i,\lambda\lambda_i\}$

c) Soit $\bigcup_{j=1}^l I_j = \{1,\ldots,n\}$ une partition telle que pour tout $\alpha \in \{1,\ldots,l\}$, on a $\mu_\alpha = \sum_{i\in I_\alpha} \lambda_i \neq 0$, alors, si on pose $G_\alpha := Bar\{A_i,\lambda_i\}_{i\in I_\alpha}$, on a $Bar\{A_i,\lambda_i\}_{i\in I} = Bar\{G_\alpha,\mu_\alpha\}_{1\leq\alpha\leq l}$.

Exercice 2.8

Soit $\{(A_i,\lambda_i)\}_{i=1}^n$ de points pondérés d'un espace affine X, on considère la fonction $L : X \longrightarrow \overrightarrow{X} : M \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i\overrightarrow{MA_i}$.
1. Montrer que si $\sum_i \lambda_i = 0$ alors L est constante.

2. Montrer que si $\sum_i \lambda_i \neq 0$ alors L est bijective. Caractériser alors le barycentre des points pondérés $\{(A_i,\lambda_i)\}_{i=1}^n$ au moyen de la fonction L.

Proposition 2.1.9. *Soit $(X,\overrightarrow{X})$ un espace affine et $Y \subseteq X$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *Y est sous espace affine de X.*
2. *$\{\overrightarrow{y_1y_2} \,|\, (y_1,y_2) \in Y^2\}$ est un sous espace vectoriel de $\overrightarrow{X}$.*
3. *Tout barycentre de points pondérés de Y est encore un point de Y.*

2.2 applications affines et groupe affine

Définition 2.2.1. Soient X et X' deux espaces affines définies sur un même corps; une application $\varphi : X \longrightarrow X'$ est dite affine s'il existe une application linéaire $\overrightarrow{\varphi} : \overrightarrow{X} \longrightarrow \overrightarrow{X'}$ telle que pour tout $a,b \in X$ on a

$$\overrightarrow{\varphi(a)\varphi(b)} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{ab})$$

Proposition 2.2.2. *Soient X,X' deux espaces affines et $\varphi : X \longrightarrow X'$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

i) *φ est affine.*

ii) $\forall M \in X \quad \forall \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{X}, \quad \varphi(M + \overrightarrow{x}) = \varphi(M) + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{x})$.

iii) $\forall \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{X}, \quad \varphi.t_{\overrightarrow{x}} = t_{\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{x})}.\varphi$.

iv $\forall (M,N) \in X^2$, $\overrightarrow{(}\varphi)(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)}$.

v) *φ préserve les combinaisons barycentriques : i.e...*

Proposition 2.2.3. *Soient X,X',X'' trois espaces affines et $\varphi : X \longrightarrow X'$ une application affine. Alors*

1. *$\overrightarrow{\varphi}$ est unique.*
2. *φ est surjective (resp. injective) si et seulement si $\overrightarrow{\varphi}$ l'est.*
3. *Si $\psi : X' \longrightarrow X''$ est aussi affine alors $\psi.\varphi$ est affine et $\overrightarrow{\psi.\varphi} = \overrightarrow{(\psi)}.\overrightarrow{\varphi}$.*

Voici une autre proposition qui montrent comment associer des applications affines à une application linéaire:

Proposition 2.2.4. *Soient X,X' deux espaces affines définies sur un même corps, $a \in X$ $A' \in X'$ et φ une application linéaire de $\overrightarrow{X}$ vers $\overrightarrow{X'}$. Alors il existe une unique application affine $f : X \longrightarrow X'$ telle que $f(A) = A'$ et $\overrightarrow{f} = \varphi$.*

matrice d'une application affine dans un repère affine.

Lemma 2.2.5. *Soit $F \neq emptyset$ un sous espace affine de X et $\overrightarrow{Z}$ un sous espace vectoriel de $\overrightarrow{X}$. Pour que $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{Z}$ soient supplémentaires il faut et il suffit que pour tout $x \in X$, la variété $x + \overrightarrow{Z}$ coupe F en un et un seul point.*

Soit $F \subseteq X$ et $\overrightarrow{Z} \subseteq \overrightarrow{X}$. Supposons que $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{X}$ et soit $\sigma : \overrightarrow{X} \longrightarrow \overrightarrow{F}$ et $\tau : \overrightarrow{X} \longrightarrow \overrightarrow{Z}$, les projections correspondantes.

Exercice Montrer que pour tout $c,d \in F$ et pour tout $x \in X$, on a $c + \sigma(\overrightarrow{cx}) = d + \sigma(\overrightarrow{dx})$

Définition 2.2.6. La projection de X sur F parallèlement à $\overrightarrow{Z}$ est l'application affine p définie par $p(c) = c$ et $\overrightarrow{p} = \sigma$.

Remarque 2.2.7.
1. p fixe les points de F et p est indépendante du point $c \in F$choisi.
2. Pour $x \in X$, $p(x)$ est l'unique point de $x + \overrightarrow{Z} \cap F$donné par le lemme.
3. On a $p.p = p$.
4. réciproquement : si $f : X \longrightarrow X$ est une application affine telle que $f.f = f$ alors f est une projection (sur $im(f)$ parallèlement à $ker(\overrightarrow{f})$).

Définition 2.2.8. affinité de base F de direction $\overrightarrow{Z}$ et de rapport β

Proposition 2.2.9.
1. toute affinité est affine.
2. Toute affinité qui n'est pas une projection est bijective.

Définition 2.2.10. Soit H un hyperplan d'un espace affine X. On dit qu'une application affine $u : X \longrightarrow X$ est une transvection de base H si $F(u) := \{x \in X | u(x) = x\} = H$ et si pour tout $x \in X$, $\overrightarrow{xu(x)} \in H$.

Theorem 2.2.11. *Soit h un hyperplan de'un espace affine X, $A \notin H$, $B \in X$. Alors*
1. $\exists ! u : X \longrightarrow X$ affine telque $H \subseteq F(u)$ et $u(A) = B$.
2. $\forall x, \overrightarrow{xu(x)}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont linéairement dépendants.
3. u est une transvection si $\overrightarrow{AB} \in H$ et une affinité si $\overrightarrow{AB} \notin \overrightarrow{H}$

Corollary 2.2.12. *Toute transvection est bijective et son inverse est une transvection.*

Lemma 2.2.13. *Soit $\beta \in K^*$ $u : X \longrightarrow X$. Les CSSE:*
1. $\forall (A,B) \in X^2$ $\overrightarrow{u(A)u(B)} = \beta \overrightarrow{AB}$.
2. u est affine et $\overrightarrow{u} = \beta id_{\overrightarrow{X}}$.
3. u est une translation (si $\beta = 1$) ou une homothétie de rpport β.

Définition 2.2.14. Les applications $u : X \longrightarrow X$ telles que $\overrightarrow{u} = \beta id$, $\beta \in K^*$, sont appelées les homothéties-translations (ou les dilatations). L'ensemble des homtéties-translations est noté $HT(X)$.

Corollary 2.2.15. *Soit$X$un espace affine de dimension ≥ 2. Les éléments de HT(X) sont exactement les bijections de X sur X qui transforment toute droite en une droite parallèle.*

Theorem 2.2.16. *Soit X un espace affine, $\overrightarrow{X}$ sa direction et $a \in X$. On note $GA(X) = \{f : X \longrightarrow X |\, \text{f est affine et bijective}\}$, $GA_a(X) = \{f \in GA(X) |\, f(a) = a\}$ et $GL(\overrightarrow{X}) = \{f : \overrightarrow{X} \longrightarrow \overrightarrow{X} |\, f est un isomorphisme\}$.*
1. $GA(X)$ est un groupe pour la composition.

2. *$GA_a(X)$ est un sous groupe de $GA(X)$ isomorphe à $GL(\overrightarrow{X})$.*
3. *Soit $\phi : GA(X) \longrightarrow GL(\overrightarrow{X}) : f \mapsto \overrightarrow{f}$ est un épimorphisme de groupes et de noyau $T(X) = \{translations\}$.*
4. *Soit $a \in X$ et $f \in GA(X)$, il existe (s,g) et (t,h)dans $T(x) \times GA_a(X)$ uniquement déterminés par f et telles que $f = s.g = h.t$.*
5. *$T(X)$ et $HT(X)$ sont des sous groupes normaux de $GA(X)$.*
6. *Pour tout $a \in X$, le groupe $GA(X)$ est isomorphe au produit semi-direct $T(X) \times_\sigma GA_a(X)$ ou $\sigma_g(t) = gtg^{-1}$ pour $t \in T(X), g \in GA(X)$.*

Enonçons le théorème fondamentale de la géométrie affine :

Theorem 2.2.17. *Soit X et Y deux espaces affines sur le corps $\mathbb{R}$ tels que $dimX \geq 2$. Toute bijection de X sur Y qui applique trois points alignés de X sur trois points alignés de Y est affine.*

2.3 Convexité

Dans cette section, X désigne un espace affine sur le corps des réels.

Lemma 2.3.1. *Soit X un espace affine réel et C une partie de X. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1. *Le barycentre G de toute famille finie $\{(A_1,\lambda_1), \ldots (A_n,\lambda_n)\}$ de points pondérés de C telle que $\lambda_1 \geq 0 \ldots \lambda_n \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.*
2. *$\forall M \in C\ \forall N \in C\ [MN] = \{M + \overrightarrow{\lambda MN} : 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq C$.*

Définition 2.3.2. Une partie C d'un espace affine réel X est dite **convexe** si les conditions équivalentes du lemme ci-dessus sont vérifiées.

Proposition 2.3.3. *Soient $C \subseteq X, C4 \subseteq X'$ deux sous ensembles d' espaxes affines réels et $f : X \longrightarrow X'$ une application affine. Alors :*

1. *Si C est convexe alors $f(C)$ est un convexe.*
2. *Si C' est un convexe alors $f^{-1}(C')$ est convexe.*

Cette section sera augmentée ultérieurement.

Chapitre 3

Géométrie vectorielle euclidienne

3.1 Formes bilinéaires symétriques

Définition 3.1.1. Soit V un K-vectoriel (Carctéristique $K \neq 2$), et $\underline{e} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de V. Une application bilinéaire symétrique $b : V \times V \longrightarrow K$ est entiérement déterminée par la matrice notée $Gram_{\underline{e}}(b) = (b(e_i,e_j)_{ij})$. Réciproquement si une base $e_1,dots,e_n$ de V est fixée, toute matrice symétrique $n \times n$ permet de définir une forme bilinéaire sur V.

La proposition suivante précise ce que devient la matrice gramienne lors d'un changement de base.

Proposition 3.1.2. *Soit $\underline{e}$ et $\underline{e}'$ deux bases de V. Notons P la matrice de passage : (i.e. $e'_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} e_k$), alors*

$$Gram_{\underline{e}'} b = P gram_{\underline{e}} b P^t$$

Définition 3.1.3. Soit X un sous-ensemble d'un espace vectoriel V muni d'une forme bilinéaire b. L'orthogonal de X est

$$X^{\perp} = \{v \in V \,|\, b(v,x) = 0 \, \forall x \in X\}.$$

$X^{\perp}$ est un sous vectoriel de V. En particulier $V^{\perp}$ est appelé le **radical** de V. On dit que la forme b est non dégénéré si $V^{\perp}$=0.

Proposition 3.1.4. *Soit (V,b) un espace vectoriel mni d'une forme bilinéaire symétrque. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1. *b est non dégénéré.*
2. *Pour toute base e de V $Gram_e b$ est une matrice inversible.*
3. *$\hat{b} : V \longrightarrow V^* : v \mapsto b_v$, where for $u \in V$ we have $b_v(u) = b(v,u)$.*

Theorem 3.1.5. *Soit V un K-vectoriel, $b : V \times V \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique alors il existe une base orthogonale de V. Si $K = \mathbb{R}$ et $\underline{e}$, $\underline{e}'$ sont deux bases orthgogonales de V alors*

$$|\{e_i |\, b(e_i,e_i) > 0\}| = |\{e'_i |\, b(e'_i,e'_i) > 0\}|$$

$|\{e_i|\, b(e_i,e_i) < 0\}| = |\{e_i|\, b(e_i,e_i) < 0\}|$
$|\{e_i|\, b(e_i,e_i) = 0\}| = |\{e_i|\, b(e_i,e_i) = 0\}|$

3.2 Applications adjointes

Theorem 3.2.1. *Soit b une forme bilinéiare symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel V et $f : V \longrightarrow V$ une application linéaire. Il existe une et une seule application linéaire $f^* : V \longrightarrow V$ telle que*

$$\forall (x,y) \in V \times V \ b(f(x),y) = b(x,f^*(y)).$$

Une application f^* satisfaisant les conditions ci-dessus est appelée l'adjointe de f.

Proposition 3.2.2. *Voici quelques propriétés de l'application adjointe: Soit $f,g \in End(V)$ et$\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. $(f + g)^* = f^* + g^*$.
2. $(\lambda f)^* = \lambda f^*$.
3. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.
4. $(f^*)^* = f$.
5. *Si $\mathbf{e} = (e_1, \ldots ,e_n)$ est une base orthonormée de V, alors*

$$M_{\mathbf{e}}(f^*) = M_{\mathbf{e}}(f)^t.$$

3.3 Produit scalaire

Soit V un $\mathbb{R}$-vectoriel finidimensionnel et $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétriqe non dégénérée. On dit que b est positive si $b(x,x) \geq 0$ pour tout $x \in V$. On dit alors que b est un produit scalaire et on note $< x,y >= b(x,y)$. Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace vectoriel euclidien.

Proposition 3.3.1. $\forall (x,y) \in V^2 < x,y >\in V^2 \ < x,y >^2 \leq < y,y >< x,x >$

Corollary 3.3.2. *Si $<.,.>$ est un produit scalaire sur V alors $< x,x >= 0$ si et seulement si $x = 0$.*

Theorem 3.3.3. *Soit $(V, < .,. >)$ un espace vectoriel euclidien et W un sous vectoriel e V. On a $V = W \oplus W^\perp$*

Si V est un espace vectoriel euclidien on peut le munir d'une norme via $||x|| = \sqrt{< x,x >}$ pour $x \in V$. On a donc aussi une distance sur V via $d(x,y) = ||x - y||$ pour $x,y \in V$.

Définition 3.3.4. Une base $\{e_1, \ldots ,e_n\}$ d'un espace vectoriel euclidien est dite orthonormée si $< e_i,e_j >= \delta_{ij}$ pour $1 \leq i,j \leq n$.

un espace vectoriel euclidien admet toujours une base othonormée.

3.4 Opérateurs orthogonaux

Les opérateurs de la géométrie vectoriel euclidienne sont les opérateurs orthogonaux. On en donne quelques caractérisations ci-dessous :

Theorem 3.4.1. *Soit $V, <.,.>$ un espace vectoriel euclidien et $u : V \longrightarrow V$ une application. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout $(x,y) \in V^2$, $<u(x),u(y)>=<x,y>$*
2. *u est linéaire et applique toute base orthonormale sur une base orthonormale.*
3. *u est linéaire et applique une base orthonormale sur une base orthonormale.*
4. *u est linéaire et pour tout $x \in V$ $||u(x)|| = ||x||$.*
5. *u est linéaire et pour tout $x,y \in V$ $d(u(x),u(y)) = d(x,y)$.*
6. *u est linéaire et $u \circ u^* = u^* \circ u = id_V$.*

Définition 3.4.2. Soit V un vectoriel euclidien. Une application $u : V \longrightarrow V$ est orthogonal si elle vérifie les conditions ci-dessus. L'ensemble des opérateurs orthogonaux de V est noté $O(V)$.

Proposition 3.4.3. 1. *Si $u \in O(V)$ alors $det(u) \in \{1, -1\}$.*

2. *Les opérateurs orthogonaux constituent un sous-groupe de $GL(V)$ noté $O(V)$.*
3. *L'application de $det : O(V) \longrightarrow \{1, -1\}$ est un morphisme de groupes dont le noyau (qui est donc un sous-groupe normal de $0(V)$) est noté $O^+(V)$.*

Définition 3.4.4. Les éléments de $O^+(V)$ sont appelés les rotations de V.

Exercice 3.4.5 Soient V un vectoriel euclidien de dimension 2 et $\phi \in O^+(V)$, alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de V et un réel $0 \leq \theta < 2\pi$ tels que la matrice associée à ϕ soit

$$M_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Définitions 3.4.6. Soient F,Z deux sous-espaces d'un vectoriel euclidien V tels que $V = F\ oplusZ$. Une symétrie de base F et de direction Z est une application $u : V \longrightarrow V$ telle que $u(f + z) = f - z$ pour $(f,z) \in F \times Z$.

1. Si $V = F \perp Z$ u est appelé symétrie orthogonale par rapport à F.
2. Si $V = F \perp Z$ et si $dim(F) = dim(V) - 1$ u est appelé une réflexion.
3. Si $V = F \perp Z$ et si $dim(F) = dim(V) - 2$ u est appelé un retournement (si dim(V)=3 on dit aussi demi-tour).

Bien sur, les symétries orthogonales appartiennet à $O(V)$. Les retournements appartiennent à $O^+(V)$.

Lemma 3.4.7. *Soient V un vectoriel euclidien eta,$b \in V$. Si $||a|| = ||b||$ alors il existe une unique réflexion s telle que $s(a) = b$.*

Theorem 3.4.8. (Cartan) *Soit V un vectoriel euclidien. Tout opérateur orthogonal peut s'écrire comme produit d'au plus $n = dim(V)$ réflexions.*

Remarques 3.4.9.

1. Il n'y a pas unicité de la décomposition énoncée dans le théorème ci-dessus.
2. Il y a unicité de la parité du nombre de réflexions utilisées pour décomposer un opérateur orthogonale.
3. u est une rotation si et seulement si u peut se décomposer en un nombre pair de réflexions.

3.5 Similitudes

Définition 3.5.1. Soit V un vectoriel euclidien, $u : V \longrightarrow V$ une application linéaire et $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$. u est une simlitude de rapport λ si

$$\forall \{x,y\} \in V^2 \quad < u(x),u(y) >= \lambda^2 < x,y >$$

Exemples 3.5.2.

1. Les applications orthogonales sont exactement les similitudes de rapport 1.
2. Toute homothétie de rapport μ est une similitude de rapport $|\mu|$.

Exercices 3.5.3

Soit $u : V \longrightarrow V$ une application d'un espace vectoriel euclidien dans lui-même. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes:

i) u est une similitude de rapport λ.

ii) u est linéaire et $\forall x \in V \; ||u(x)|| = \lambda ||x||$.

iii) u est linéaire et $\forall (x,y) \in V^2 \; d(u(x),u(y)) = \lambda d(x,y)$.

iV) u est linéaire et $u^* \circ u = u \circ u^* = \lambda^2 id_V$.

Proposition 3.5.4. *Soit V un vectoriel euclidien de dimension ≥ 2 et $0 \neq u$ une application linéaire de V dans lui-même.*

$$u \text{ est une similitude ssi } (\forall (x,y) \in V^2, x \perp y \Rightarrow u(x) \perp u(y))$$

Chapitre 4

Géométrie affine euclidienne

4.1 Définitions

Définition 4.1.1. a) Un espace affine euclidien est un espace affine E dont la direction $\overrightarrow{E}$ est un espace vecoriel euclidien. Le produit scalaire de $\overrightarrow{E}$ permet de munir E d'une distance : pour $(x,y) \in E^2$, on pose $d(x,y) = ||\overrightarrow{xy}||$.

b) Si F,G sont des sous-espaces affines de l'espace euclidien E, F et G sont orthogonaux si $\overrightarrow{F} \subseteq \overrightarrow{G}^{\perp}$.

c) On appelle projection orthogonale de E sur F, la projection de E parallèlement à $\overrightarrow{F}^{\perp}$.

c) On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $\overrightarrow{F}^{\perp}$. Si $codim(F) = 1$, la symétrie orthogonale est appelée réflexion d'hyperplan F. Si $codim(F) = 2$ la symétrie orthogonale par rapport à F est un retournement.

Exercices 4.1.2
a) Montrer que si F,G sont des sous-espaces de l'espace affine euclidien E, alors $\overrightarrow{F} \subseteq \overrightarrow{G}^{\perp} ssi \overrightarrow{G} \subseteq \overrightarrow{F}^{\perp}$.
b) Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 et $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère affine orthonormée.

1) Pour tout $(a,b,c,d,) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ le vecteur $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ est orthogonal au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

2) Une équation cartésienne du plan P orthogonale à $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ et passant par $M_0(x_0,y_0,z_0)$ est

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

3) Soit $ax + by + cz + d = 0$ une équation cartésienne d'un plan P et $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de E. Si $H(X,Y,Z)$ désigne la projection orthogonale de

H_0 sur P, on a

$$\begin{cases} X = x_0 - \frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}a \\ Y = y_0 - \frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}b \\ Z = z_0 - \frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}c \end{cases}$$

4) Soit P un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de E, alors

$$d(M_0,P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Proposition 4.1.3. *Soit E un espace affine euclidien et $u : E \longrightarrow E$, une application affine. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

i) u est une réflexion.

ii) u a des points fixes et $\overrightarrow{u}$ est une réflexion.

iii) u est une isométrioe dont l'ensemble des points fixes est un hyperplan.

Définition 4.1.4. Soit E un espace affine euclidien et $f \in GA(E)$.

1. f est une similitude affine de rapport $\lambda > 0$ si $\overrightarrow{f}$ est une similitude vectorille de rapport $\lambda > 0$.
2. Une similitude affine de rapport $\lambda = 1$ est appelée une isométrie affine.
3. Une similitude affine est dite directe si $det(\overrightarrow{f}) > 0$.
4. Une similitude affine est dite indirecte si $det(\overrightarrow{f}) < 0$.
5. Les isométries directes sont appelées des déplacements, les isométries indirectes sont appelées des antidéplacements.

4.2 Décomposition des isométries et similitudes

Lemma 4.2.1. *Soit $(V, <.,.>)$ un espace vectoriel euclidien et $u \in O(V)$, alors $ker(u - id.)$ et $Im(u - id.)$ sont des supplémentaires orthogonaux.*

Theorem 4.2.2. *Toute isométrie f d'un espace affine euclidien E peut s'écrire de manière unique sous la forme $f = t \circ g = g \circ t$ où $g \in is(E)$ telle que $F(g) \neq \emptyset$ et $t = t_{\overrightarrow{a}}$ où $\overrightarrow{a} \in F(\overrightarrow{g})$.*

La décomposition ci-dessus est appelée la décomposition canonique d'une isométrie. Le résultat suivant est basée sur le théorème de Cartan (Cf. 3.4.8)

Theorem 4.2.3. *Toute isométrie est un produit d'au plus $n+2$ réflexions où $n = dim(E)$.*

On va maintenant montrer que le groupe des des déplacements est engendré par les retournements:

Lemma 4.2.4. *Soient H_1,H_2 des hyperplans d'un espace affine euclidien. Les affirmations suivantes sont équivalentes*

i) $\overrightarrow{H_1}^{\perp} \subseteq \overrightarrow{H_2}$.

ii) $\overrightarrow{H_2}^{\perp} \subseteq \overrightarrow{H_1}$.

En outre, dans ce cas, $H_1 \cap H_2$ *est un sous-espace de codimension 2 et on a* $S_{H_1} \circ S_{H_2} = S_{H_1 \cap H_2} = S_{H_2} \circ S_{H_1}$*, où* S_{H_*} *désigne la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace affine* H_**.*

Theorem 4.2.5. *Soit* E *un espce affine euclidien de dimension* ≥ 3*, le groupe des déplacements de* E *est engendré par les symétries orthogonales dont l'axe est de codimension 2 (i.e. les retournements).*

Proposition 4.2.6. *Soit* g *une similitude de rapport* $\lambda \neq 1$*. Alors*

a) g *a un unique point fixe, soit* c*.*

b) Soit h *l'homothétie de centre* c *et de rapport* λ*. Il existe une unique isométrie* f *de* E *tel que* $f(c) = c$ *et* $g = h \circ f = f \circ h$*.*

4.3 Classification des isométries en dimension 2 et 3

4.4 Application : Groupes cristallographiques