Ensembles. Fonctions. Cardinaux

Exercice 1 Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

Exercice 2 Soit A, B deux ensembles, montrer $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ et $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.

Exercice 3 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$. Démontrer que :
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
$\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Exercice 4 A et B étant des parties d'un ensemble E, démontrer les lois de Morgan :

$$\complement A \cup \complement B = \complement(A \cap B) \quad \text{et} \quad \complement A \cap \complement B = \complement(A \cup B).$$

Exercice 5 Démontrer les relations suivantes :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Exercice 6 Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E :

$$(F \subset G \iff F \cup G = G) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff \complement F \cup G = E).$$

En déduire que :

$$(F \subset G \iff F \cap G = F) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff F \cap \complement G = \emptyset).$$

Exercice 7 Soit un ensemble E et deux parties A et B de E. On désigne par $A \triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. *Dans les questions ci-après il pourra être commode d'utiliser la notion de fonction caractéristique.*

1. Démontrer que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Démontrer que pour toutes les parties A, B, C de E on a $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. Démontrer qu'il existe une unique partie X de E telle que pour toute partie A de E, $A \triangle X = X \triangle A = A$.
4. Démontrer que pour toute partie A de E, il existe une partie A' de E et une seule telle que $A \triangle A' = A' \triangle A = X$.

Exercice 8 Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 9 Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E.
Montrer que $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Exercice 10 Est-il vrai que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$? Et $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

Exercice 11 Montrer que $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \complement B = A \cap \complement C$.

Exercice 12 Soient $A, B \subset E$. Résoudre les équations à l'inconnue $X \subset E$

1. $A \cup X = B$.
2. $A \cap X = B$.

Exercice 13 Soit E et F des ensembles. Si $A \subset E$ et $B \subset F$ montrer que $A \times B \subset E \times F$.

Exercice 14 Soient E, F, G trois ensembles. Montrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.

Exercice 15 Soient E, F, G, H quatre ensembles. Comparer les ensembles $(E \times F) \cap (G \times H)$ et $(E \cap G) \times (F \cap H)$.

Exercice 16 Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{1, 2, 3\}$. Pour $i = 1, 2, 3$ on pose $A_i = \{f \in E / f(0) = i\}$. Montrer que les A_i forment une partition de E.

Exercice 17 Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$
2. $g : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$
3. $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x+y, x-y) \end{cases}$
4. $k : \begin{cases} \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$

Exercice 18 On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective,}$$

$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective.}$$

Montrer que :

$$\big(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }\big) \Leftrightarrow \big(f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\big).$$

Exercice 19 Soit $f : X \to Y$. Montrer que

1. $\forall B \subset Y \;\; f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.
2. f est surjective ssi $\forall B \subset Y \;\; f(f^{-1}(B)) = B$.
3. f est injective ssi $\forall A \subset X \;\; f^{-1}(f(A)) = A$.
4. f est bijective ssi $\forall A \subset X \;\; f(\complement A) = \complement f(A)$.

Exercice 20 Soit $f : X \to Y$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i. f est injective.
ii. $\forall A, B \subset X \ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
iii. $\forall A, B \subset X \ A \cap B = \emptyset \Rrightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Exercice 21 Soient $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives alors f, g et h le sont également.

Exercice 22 Soit X un ensemble. Si $A \subset X$ on note χ_A la fonction caractéristique associée. Montrer que $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(X) \to \mathcal{F}(X, \{0,1\}) \\ A \mapsto \chi_A \end{cases}$ est bijective.

Exercice 23 Soit E un ensemble non vide. On se donne deux parties A et B de E et on définit l'application $f : \wp(E) \to \wp(E)$, $X \mapsto (A \cap X) \cup (B \cap X^c)$. Discuter et résoudre l'équation $f(X) = \emptyset$. En déduire une condition nécessaire pour que f soit bijective.
On suppose maintenant $B = A^c$. Exprimer f à l'aide de la différence symétrique Δ. Montrer que f est bijective, préciser f^{-1}. f est-elle involutive (i.e. $f^2 = id$) ? Quelle propriété en déduit-on ?

Exercice 24 Pour A, B deux ensembles de E on note $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Pour E un ensemble fini, montrer :

$$\text{Card}\, A \Delta B = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B - 2\text{Card}\, A \cap B.$$

Exercice 25 Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Exercice 26 Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ et $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Écrire le produit cartésien $A \times B$. Quel est le nombre de parties de $A \times B$?

Exercice 27 Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre d'éléments de E^p ? Quel est le nombre de parties de E^p ?

Exercice 28 Soient A, A', B, B' quatre ensembles tels que :

$$\text{Card}\,(A) = \text{Card}\,(A') = a \text{ et } \text{Card}\,(B) = \text{Card}\,(B') = b.$$

1. Déterminer le nombre de bijections de $A \times B$ sur $A' \times B'$.
2. Supposons maintenant que $\{A, B\}$, $\{A', B'\}$ forment deux partitions de E, un ensemble. Déterminer le nombre de bijections $f : E \longrightarrow E$ telles que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

Exercice 29 Soient A et B deux sous ensembles finis d'un ensemble E.

1. Montrer que : $\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}\,(A) + \text{Card}\,(B) - \text{Card}\,(A \cap B)$.
2. Montrer par récurrence que si $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille de sous-ensembles finis de E alors :

$$\text{Card}\,(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \text{Card}\,(F_i)$$

   avec égalité si les F_i sont deux à deux disjoints.

Exercice 30 Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable en utilisant l'application :

$$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \begin{cases} n \mapsto 2n-1 & \text{si } n > 0\,; \\ n \mapsto -2n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 31

1. (*principe des bergers*) Soient E, F deux ensembles avec F ensemble fini, et f une surjection de E sur F vérifiant :

   $$\forall y \in F,\ \mathrm{Card}\,(f^{-1}(y)) = p$$

   Montrer que E est alors un ensemble fini et $\mathrm{Card}\,(E) = p\mathrm{Card}\,(F)$.

2. (*principe des tiroirs*) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, p élements distincts d'un ensemble E, répartis entre une famille de n sous-ensembles de E. Si n au moins deux éléments parmi les α_i.(on pourra raisonner par l'absurde)

Université Lens Année 2003-2004
MIAS 1ère année **feuille n° 1**

Ensembles. Fonctions. Cardinaux

Correction 1 Nous allons démontrer l'assertion 1. de deux manières différentes.

1. Tout d'abord de façon "directe". Nous supposons que A et B sont telles que $A \cap B = A \cup B$. Nous devons montrer que $A = B$.

   Pour cela étant donné $x \in A$ montrons qu'il est aussi dans B. Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$). Ainsi $x \in B$.

   Maintenant nous prenons $x \in B$ et le même raisonnement implique $x \in A$.

   Donc tout élément de A est dans B et tout élément de B est dans A. Cela veut dire $A = B$.

2. Ensuite, comme demandé, nous le montrons par contraposition. Nous supposons que $A \neq B$ et non devons monter que $A \cap B \neq A \cup B$.

   Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A \setminus B$ ou alors un élément $x \in B \setminus A$. Quitte à échanger A et B, nous supposons qu'il existe $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

Correction 2

$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ et } x \in \complement B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cap B) &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ ou } x \in \complement \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \cup \complement B. \end{aligned}$$

Correction 3 Montrons quelques assertions.
$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Si $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$, or $x \in A$ donc $y = f(x) \in f(A)$ et de même $x \in B$ donc $y \in f(B)$. D'où $y \in f(A) \cap f(B)$. Tout élément de $f(A \cap B)$ est un élément de $f(A) \cap f(B)$ donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Remarque : l'inclusion réciproque est fausse. Exercice : trouver un contre-exemple.

$f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F \setminus A) &\Leftrightarrow f(x) \in F \setminus F \setminus A \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin A \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \text{ car } f^{-1} = \{x \in E \ / \ f(x) \in A\} \\ &\Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(A) \end{aligned}$$

Correction 12 1. $B \setminus A \subset X \subset B$.

2. $B \subset X \subset B \cup \cup \complement A$.

Correction 18 1. Supposons $g \circ f$ injective, et montrons que f est injective : soit $a,\ a' \in A$ avec $f(a) = f(a')$ donc $g \circ f(a) = g \circ f(a')$ or $g \circ f$ est injective donc $a = a'$. Conclusion on a montré :

$$\forall a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

c'est la définition de f injective.

2. Supposons $g \circ f$ surjective, et montrons que g est surjective : soit $c \in C$ comme $g \circ f$ est surjective il existe $a \in A$ tel que $g \circ f(a) = c$; posons $b = f(a)$, alors $g(b) = c$, ce raisonnement est valide quelque soit $c \in C$ donc g est surjective.

3. Un sens est simple ($\Leftarrow$) si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est également. De même avec $h \circ g$.

   Pour l'implication directe ($\Rightarrow$) : si $g \circ f$ est bijective alors en particulier elle est surjective et donc d'après le deuxième point g est surjective.

   Si $h \circ g$ est bijective, elle est en particulier injective, donc g est injective (c'est le 1.). Par conséquent g est à la fois injective et surjective donc bijective.

   Pour finir $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective comme composée d'applications bijectives, de même pour h.

Correction 24 Tout d'abord si deux ensembles finis P et Q sont disjoints alors $\operatorname{Card} P \cup Q = \operatorname{Card} P + \operatorname{Card} Q$. L'idée est donc d'écrire $A \Delta B$ comme union de deux ensembles disjoints.

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)).$$

Ces deux ensembles $A \setminus (A \cap B)$ et $B \setminus (A \cap B)$ sont disjoints. En utilisant que pour $R \subset S$ nous avons $\operatorname{Card} S \setminus R = \operatorname{Card} S - \operatorname{Card} R$, nous obtenons :

$$\operatorname{Card} A \Delta B = \operatorname{Card} A \setminus (A \cap B) + \operatorname{Card} B \setminus (A \cap B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - 2\operatorname{Card}(A \cap B).$$

Correction 25 Fixons un élément de A ; dans $E \setminus A$ (de cardinal $n - p$), nous pouvons choisir C_{n-p}^k ensembles à k éléments ($k = 0, 1, \ldots, n$). Le nombre d'ensembles dans le complémentaire de A est donc

$$\sum_{k=0}^{n-p} C_{n-p}^k = 2^{n-p}.$$

Pour le choix d'un élément de A nous avons p choix, donc le nombre total d'ensembles qui vérifie la condition est :

$$p 2^{n-p}.$$