Université de Lens Année 2003-2004
MIAS $1^{\text{ère}}$ année **feuille n° 2**

Relation d'équivalence. Relation d'ordre

Exercice 1 1. Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{R}$ par : $(a,b)\mathcal{R}(a',b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Identifier $E/\mathcal{R}$.

2. Mêmes questions avec $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $(p,q)\mathcal{R}(p',q') \Leftrightarrow pq' = p'q$.

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow y = y'.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3 Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 4 Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E, symétrique et transitive. Que penser du raisonnement suivant ?

"$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est symétrique,
or ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$) $\Rightarrow x\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est transitive,
donc $\mathcal{R}$ est réflexive."

Exercice 5 Étudier la relation $\Re$ définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) par :

$$f\Re g \Longleftrightarrow \exists A > 0, \forall x \in R, |x| > A \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Exercice 6 Montrer que la relation $\Re$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\Re y \Longleftrightarrow xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\Re$.

Exercice 7 La relation "divise" est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$? sur $\mathbb{Z}$? Si oui, est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice 8 Étudier les propriétés des relations suivantes. Dans le cas d'une relation d'équivalence, préciser les classes ; dans le cas d'une relation d'ordre, préciser si elle est totale, si l'ensemble admet un plus petit ou plus grand élément.

1. Dans $\mathcal{P}(E)$: $A\mathcal{R}_1 B \Leftrightarrow A \subset B$; $A\mathcal{R}_2 B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

2. Dans $\mathbb{Z}$: $a\mathcal{R}_3 b \Leftrightarrow a$ et b ont la même parité ; $a\mathcal{R}_4 b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ a-b=3n$; $a\mathcal{R}_5 b \Leftrightarrow$ $a-b$ est divisible par 3.

Exercice 9 Soient $(X, \leqslant)$ et $(Y, \leqslant)$ deux ensembles ordonnés (on note abusivement les deux ordres de la même façon). On définit sur $X \times Y$ la relation
$(x, y) \leqslant (x', y')$ ssi $(x < x')$ ou $(x = x'$ et $y \leqslant y')$. Montrer que c'est un ordre et qu'il est total ssi X et Y sont totalement
ordonnés.

Exercice 10 Un ensemble est dit bien ordonné si toute partie non vide admet un plus petit élément.

1. Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.
2. Montrer que bien ordonné implique totalement ordonné.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 11 Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ la relation $\mathcal{R}$ par $X\mathcal{R}Y$ ssi $(X = Y$ ou $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x \leqslant y)$. Vérifier que c'est une relation d'ordre.

Exercice 12 Montrer que $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$ est une l.c.i sur $]-1, 1[$ et déterminer ses propriétés.

Relation d'équivalence. Relation d'ordre

Correction 3 1. Soit z, z', z'' des complexes quelconques.
- Reflexivité : $z\mathcal{R}z$ car $|z| = |z|$.
- Symétrie : $z\mathcal{R}z' \Rightarrow z'\mathcal{R}z$ car $|z| = |z'|$ et donc $|z'| = |z|$.
- Transitivité : $z\mathcal{R}z'$ et $z'\mathcal{R}z''$ alors $|z| = |z'| = |z''|$ donc $z\mathcal{R}z''$.

En fait, nous avons juste retranscrit que l'égalité = est une relation d'équivalence.

2. La classe d'équivalence d'un point $z \in \mathbb{C}$ est l'ensemble des complexes qui sont en relation avec z, *i.e.* l'ensemble des complexes dont le module est égal à $|z|$. Géométriquement la classe d'équivalence de z est le cerlce $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon $|z|$.

$$\mathcal{C} = \{|z|e^{i\theta} \ / \ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Correction 4 Le raisonnement est faux.
L'erreur est due au manque de quantification. En effet, rien ne prouve que pout tout x un tel y existe. Il peut exister un élément x qui n'est en relation avec personne (même pas avec lui).