Université de Lens Année 2003-2004
MIAS $1^{\text{ère}}$ année **feuille n° 1**

Logique

Exercice 1 Démontrer que $(1 = 2) \Rightarrow (2 = 3)$.

Exercice 2 Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0\ ;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Exercice 3 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leqslant 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leqslant 0$.

On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit, juste d'écrire le contraire d'un énoncé.

Exercice 4 Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R}$ $x^2 = 4$ ...... $x = 2$;
2. $z \in \mathbb{C}$ $z = \overline{z}$ ...... $z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R}$ $x = \pi$ ...... $e^{2ix} = 1$.

Exercice 5 Nier la proposition : "tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans".

Exercice 6 Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

1. $P \Rightarrow Q$,
2. P et non Q,
3. P et (Q et R),
4. P ou (Q et R),
5. (P et Q) $\Rightarrow$ ($R \Rightarrow S$).

Exercice 7 Nier les assertions suivantes :

1. tout triangle rectangle possède un angle droit ;
2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
3. pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique la relation $z < x + 1$;

4. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \alpha > 0 \;\; / \;\; |x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \varepsilon$.

Exercice 8 (Le missionnaire et les cannibales) Les cannibales d'une tribu se préparent à manger un missionnaire. Désirant lui prouver une dernière fois leur respect de la dignité et de la liberté humaine, les cannibales proposent au missionnaire de décider lui-même de son sort en faisant une courte déclaration : si celle-ci est vraie, le missionnaire sera rôti, et il sera bouilli dans le cas contraire. Que doit dire le missionnaire pour sauver sa vie ? (d'après Cervantès)

Exercice 9 La proposition $\big(P \wedge Q \Rrightarrow (\neg P) \vee Q\big)$ est-elle vraie ?

Exercice 10 On suppose que la proposition P est vraie ainsi que les propositions suivantes :

1. $(\neg Q) \wedge P \Rightarrow \neg S$.
2. $S \Rightarrow (\neg P) \vee Q$.
3. $P \Rightarrow R \vee S$.
4. $S \wedge Q \Rightarrow \neg P$.
5. $R \wedge \neg(S \vee Q) \Rightarrow T$.
6. $R \Rightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$.

La proposition T est-elle vraie ?

Exercice 11 Ecrire la négation des phrases suivantes :

1. $(\forall x)(\exists n)/(x \leqslant n)$.
2. $(\exists M)/(\forall n)(|u_n| \leqslant M)$.
3. $(\forall x)(\forall y)(xy = yx)$.
4. $(\forall x)(\exists y)/(yxy^{-1} = x)$.
5. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})/(\forall n \geqslant N)(|u_n| < \varepsilon)$.
6. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)/(\forall f \in \mathcal{F})(\forall y \in \mathbb{R})(|x - y| < \alpha \Rrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$.

Exercice 12 Si $P(x)$ est une proposition dépendant de $x \in X$, on note $\overline{P} = \{x \in X/P(x) \text{ est vraie}\}$. Exprimer en fonction de $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ les ensembles $\overline{\neg P}, \overline{P \wedge Q}, \overline{P \vee Q}, \overline{P \Rrightarrow Q}, \overline{P \Leftrightarrow Q}$.

Exercice 13 Indiquer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1. Si Socrate est mort, alors Socrate est immortel.
2. Si Socrate est immortel, alors Socrate est mort.
3. La cent dix-huitième décimale de π est 9, donc si l'eau bout à $O \deg C$, alors l'univers est en expansion.

Exercice 14 Construire les tables de vérité des formules suivantes :

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $(A \Rightarrow B) \wedge A \wedge \neg B$
3. $(A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (B \vee C)$
4. $(A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg A) \wedge (\neg C \vee \neg A)$

Pour chaque formule, indiquer si elle est valide, consistante, inconsistante.

Exercice 15 Ecrire la formule 3 en utilisant seulement $\neg$ et $\vee$. Même question avec $\Rightarrow$ (et les symboles $\top$ et $\bot$).

Université de Lens Année 2003-2004
MIAS $1^{\text{ère}}$ année **feuille n° 1**

Logique

Correction 1 Il ne faut pas se laisser impressionner par l'allure de cette assertion. En effet $A \Rightarrow B$ est une écriture pour B ou (non$A$) ; ici A (la proposition $(1 = 2)$) est fausse, donc (non$A$) est vraie
et B ou (non$A$) l'est également. Donc l'assertion $A \Rightarrow B$ est vraie, quand A est fausse et quelque soit la proposition B.

Correction 2
1. (a) est fausse. Car sa négation qui est $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y \leqslant 0$ est vraie. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y \leqslant 0$, par exemple on peut prendre $y = -(x + 1)$ et alors $x + y = x - x - 1 = -1 \leqslant 0$.
2. (b) est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x + 1$ et alors $x + y = 1 > 0$. La négation de (b) est $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y \leqslant 0$.
3. (c) : $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$ est fausse, par exemple $x = -1$, $y = 0$. La négation est $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x + y \leqslant 0$.
4. (d) est vraie, on peut prendre $x = -1$. La négation est : $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 \leqslant x$.

Correction 3 Dans ce corrigé, nous donnons une justification, ce qui n'était pas demandé.
1. Cette assertion se décompose de la manière suivante : (Pour tout $x \in \mathbb{R}$) $(f(x) \leqslant 1)$. La négation de "(Pour tout $x \in \mathbb{R}$)" est "Il existe $x \in \mathbb{R}$" et la négation de "$(f(x) \leqslant 1)$" est $f(x) > 1$. Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) > 1$.
2. Rappelons comment se traduit l'assertion "L'application f est croissante" : "pour tout couple de réels (x_1, x_2), si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Cela se décompose en : "(pour tout couple de réels x_1 et x_2) ($x_1 \leqslant x_2$ implique $f(x_1) \leqslant f(x_2)$)". La négation de la première partie est : "(il existe un couple de réels (x_1, x_2))" et la négation de la deuxième partie est : "($x_1 \leqslant x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$)". Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leqslant x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$".
3. La négation est : l'application f n'est pas croissante ou n'est pas positive. On a déjà traduit "l'application f n'est pas croissante", traduisons "l'application f n'est pas positive" : "il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$". Donc la négation de l'assertion complète est : " Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leqslant x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$, ou il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$".
4. Cette assertion se décompose de la manière suivante : "(Il existe $x \in \mathbb{R}^+$) $(f(x) \leqslant 0)$". La négation de la première partie est : "(pour tout $x \in \mathbb{R}^+$), et celle de la seconde est :"$(f(x) > 0)$". Donc la négation de l'assertion complète est : " Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) > 0$".

Correction 4
1. $\Leftarrow$
2. $\Leftrightarrow$
3. $\Rightarrow$

Correction 5 "Il existe un habitant de la rue du Havre qui a les yeux bleus, qui ne gagnera pas au loto ou qui prendra sa retraite après 50 ans."

Correction 6 1. P et non Q ;

2. "non P ou Q" ce qui la même chose que "$P \Rightarrow Q$" ;
3. (non P) ou ((non Q) ou (non R)) (on peut supprimer les parenthèses) ;
4. non P et (non Q ou R) (ici les parenthèses sont importantes) ;
5. P et Q et R et non S ;

Correction 7 1. Un triangle dont aucun angle n'est droit n'est pas rectangle.

2. Il existe une écurie dans laquelle il y a (au moins) un cheval dont la couleur n'est pas noire.
3. Sachant que la proposition en langage mathématique s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{Z} \ \ \exists y \in \mathbb{Z} \ \ \forall z \in \mathbb{Z} \quad (z$$

la négation est

$$\exists x \in \mathbb{Z} \ \ \forall y \in \mathbb{Z} \ \ \exists z \in \mathbb{Z} \quad (z$$

4. $\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall \alpha > 0 \quad (|x - 7/5| < \alpha \text{ et } |5x - 7| \geqslant \varepsilon)$.