Chapitre 1

Théorie des ensembles

1.1 Quelques définitions

Définition 1.1.1. 1. Un ensemble est une collection d'objets.
quelques exemples : $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{C}[0,1],$.

2. Un objet a appartenant à un ensemble E est un élément de cet ensemble. On note $a \in E$. Si un objet a n'appartient pas à E on écrira $a \notin E$.
3. Un ensemble peut-être spécifié
   (a) en extension i.e. en citant ses éléments.
   $$E = \{2,4,6\}\,.$$
   (b) en compréhension i.e. en donnant une propriété que ces éléments doivent satisfaire.
   $$E = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, 2\,\mathrm{divise}\,x\}\,.$$
4. Un sous-ensemble F d'un ensemble E est un ensemble constitué de certains éléments de E. On note $F \subseteq E$.
5. Si A et B sont deux ensembles, l'union de A et B est l'ensemble des éléments appartenant soit à A soit à B on le note $A \cup B$. On a donc $A \cup B := \{x \,|\, x \in A\,\mathrm{ou} x \in B\}$.
6. Si A et B sont deux ensembles, l'intersection de A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B on le note $A \cap B$. On a donc $A \cap B := \{x \,|\, x \in A\,\mathrm{et} x \in B\}$.
7. Si $A \subseteq E$ on appelle complémentaire de A,noté $C_E A$ le sous ensemble de E formé des éléments de E qui ne sont pas éléments de A. On a donc $C_E A := \{x \in E \,|\, x \notin A\}$. Lorsque l'ensemble E contenant A est clair on note aussi $\overline{A}$ le complémentaire de A.

8. On note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des sous-ensembles de A. les éléments de $\mathcal{P}(A)$ sont donc les ensembles B tels $B \subseteq A$. En particulier $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ et $A \in \mathcal{P}(A)$.

La proposition suivante énumère quelques propriétés liant les définitions ci-dessus.

Proposition 1.1.2. *Soit A,B,C des sous ensembles d'un ensemble E.*

1. $\emptyset \subseteq A$, $A = B$ *si et seulement si* $A \subseteq B$ *et* $B \subseteq A$.
2. $A \cup \emptyset = A$, $\quad A \cup E = E$, $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$ *et* $A \cap E = A$.
3. $A \cap C_E A = \emptyset$.
4. $A \cup C_E A = E$.
5. $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$.
6. $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$.
7. $A \cup A = A \quad A \cap A = A$.
8. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
9. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
10. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
11. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
12. $A \subseteq B$ *si et seulement si* $C_E(B) \subseteq C_E(A)$.
13. $A \cup B = A$ *si et seulement si* $B \subseteq A$.
14. $A \cap B = A$ *si et seulement si* $A \subseteq B$.
15. $A \subseteq B$ *et* $B \subseteq C$ *alors* $A \subseteq C$.
16. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Les propriétés 5 et 6 portent le nom de *loi de De Morgan* (A. De Morgan ,1806-1871).

Exercices

1. Calculer $\mathcal{P}(\{1,2\})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.
2. Comparer $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

1.2 Produit cartésien et cardinal d'un ensemble

Définition 1.2.1. Soit A et B deux ensembles, on appelle paire d'éléments de A et B un ensemble $\{a,b\}$ ayant deux éléments l'un appartenant à A et l'autre appartenant à B.

Exercice

Soit A,B deux ensembles et $a,a' \in A$, $b,b' \in B$. Montrer que $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a'\},\{a',b'\}\}$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

Définitions 1.2.2. 1. Soit A et B deux ensembles, on appelle couple d'éléments de A et B un objet (a,b) ayant deux éléments l'un appartenant à A et l'autre appartenant à B. l'égalité de deux couples étant définies par $(a,b) = (a',b')$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$. D'une manière formelle le couple (a,b) est la paire $\{\{a\},\{a,b\}\}$.

2. Le produit cartésien, noté $A \times B$, de deux ensembles A et B est l'ensemble $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A\ b \in B\}$.
3. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles le produit cartésien des A_i est noté $A_1 \times \ldots A_n$ c'est l'ensemble des $n-uples$ d'éléments de $A_1, \ldots, A_n$ i.e. $A_1 \times \ldots A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$.

remarque On remarque donc qu'une paire est simplement un ensemble à deux éléments tandis qu'un couple est ordonné. De même un n-uple est ordonné.

Exercice Caractériser $A \times B = \emptyset$.

Définition 1.2.3. Le cardinal d'un ensemble est le nombre de ses éléments. Si l'ensemble est infini on dira que son cardinal est aussi infini. On note $|A|$, le cardinal d'un ensemble.

Remarque On verra qu'il y a "plusieurs" infinis.

Proposition 1.2.4. *1.* $|A_1, \ldots, A_n| = |A_1| \ldots |A_N|$.

2. Si $|A| = n \in \mathbb{N}$ $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Démonstration. La preuve de 1) est laissée au lecteur.

2) se démontre par induction sur n.

Pour $n = 0$ on a $A = \emptyset$ et $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$ et donc $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0$. On suppose que la formule est vraie pour un ensemble de cardinal n et on démontre alors qu'elle est vraie pour un ensemble de cardinal $n+1$. Pour cela on considère un ensemble A tel que $|A| = n+1$ et un élément $a \in A$ $(A \neq \emptyset)$. On classe les sous ensembles de A en deux ensembles disjoints suivant que ces sous en,sembles contiennent ou ne contiennent pas a. Les sous ensembles de A qui ne contiennent pas a sont des éléments de $\mathcal{P}(A \setminus \{a\})$. L'hypothèse d'induction montre qu'il y a 2^n tels sous ensembles de A. Les sous ensembles de A qui contiennent a sont alors du type $B \cup \{a\}$ où B est un sous ensemble de A qui ne contient pas a. Il y a donc aussi 2^n sous ensembles de ce type. Ainsi donc il y a au total $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ sous ensembles de A. □

1.3 Relations, applications, fonctions

Définition 1.3.1. Soient A,B deux ensembles. Une relation de A vers B est un triplet (C,D,G) où $C \subseteq A, D \subseteq B, G \subseteq A \times B$. C est appelé l'ensemble d'origine, B est l'ensemble d'arrivée (où but) et G est le graphe de la relation.

Une relation binaire est une relation telle que $A = B$, une telle relation (A,A,G) est dite :

1. réflexive si $\forall a \in A, (a,a) \in G$
2. symétrique si $\forall a,b \in A,(a,b) \in G \Rightarrow (b,a) \in G$.
3. antisymétrique si $\forall a,b \in A\, (a,b) \in G$ et $(b,a) \in G \Rightarrow a = b$.
4. transitive si $\forall a,b,c \in A, (a,b) \in G$ et $(b,c) \in G \Rightarrow (a,c) \in G$.

Une application de A vers B est une relation de A vers B telle que pour tout élément $a \in A$, il existe un unique $b \in B$ tel que $(a,b) \in G$. Dans le cas d'une application de A vers B les couples du graphe G sont déterminés de manière unique par la première composante on note souvent une application de A vers B de la manière suivante $f : A \longrightarrow B : a \mapsto b$ ce qui signifie $(a,b) \in G$. On écrit alors $b = f(a)$.

Soit $f : A \longrightarrow B$ une application de A vers B. On dit que f est

1. injective si $\forall a,a' \in A, f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$.
2. surjective si $\forall b \in B, \exists a \in A$ tel que $b = f(a)$.
3. bijective si f est injective et surjective.

Si $f : A \longrightarrow B$ est une application l'image réciproque d'un sous ensemble $C \subseteq B$, notée $f^{-1}(C)$, est l'ensemble des éléments $a \in A$ tel que $f(a) \in C$. i.e.

$$f^{-1}(C) = \{x \in A \,|\, f(x) \in C\}$$

Si $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ sont des applications, l'application notée $g \circ f$ définie par $g \circ f : A \longrightarrow C : a \mapsto g(f(a))$ est appelée la composée de f et de g.

Proposition 1.3.2. *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application, C,D des sous ensembles de A et E,F des sous ensembles de B. Alors,*

1. $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.
2. $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$.
3. $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$.
4. $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$.
5. *f est injective ssi $|f^{-1}(b)| \leq 1$ ssi* $\exists g : B \longrightarrow A\; f \circ g = id_A$.
6. *f est surjective ssi $|f^{-1}(b)| \geq 1$ ssi* $\exists g : B \longrightarrow A\; g \circ f = id_B$.
7. *f est bijective ssi $|f^{-1}(b)| = 1$ ssi* $\exists g : B \longrightarrow A\; f \circ g = id_A$ et $g \circ f = id_B$

Theorem 1.3.3. *(Théorème de Cantor-Bernstein)*

Soit X et Y deux ensembles. S'il existe une injection de X vers Y et une autre de Y vers X, alors les deux ensembles sont en bijection.

On a besoin du lemme suivant

Lemma 1.3.4. *Soit X, Y et Z trois ensembles tels que $X \subseteq Z \subseteq Y$ Si X et Y sont en bijection, alors X et Z sont en bijection.*

Démonstration. Soit $f : Y \longrightarrow X$, bijective. Posons

$$A = \cup_{n=1}^{\infty} f^n(Z \setminus X)$$

.

On a alors $f((Z \setminus X) \cup A) = A$: en effet $f((Z \setminus X) \cup A) = f(Z \setminus X) \cup f(A) = f(Z \setminus X) \bigcup (\cup_{n=2}^{\infty} f^n(Z \setminus X)) = \cup_{n=1}^{\infty} f^n(Z \setminus X) = A$.

Comme Z peut être partitionné en $(Z \setminus X) \cup A$ et $(X \setminus A)$, on pose

$$g : Z \longrightarrow X : a \mapsto \{ \begin{array}{l} f(a) \text{ si } a \in (Z \setminus X) \cup A \\ a \quad \text{si} \quad a \in X \setminus A \end{array}$$

g est alors injective car ses restrictions à $(Z \setminus X) \cup A$ et $(X \setminus A)$ (qui forment une partition) sont f et l'identité qui sont injectives. En outre g est surjective puisque $g(Z) = g\big((Z \setminus X) \cup A\big) \bigcup g\big(X \setminus A\big) = A \cup (X \setminus A) = X$. Finalement g est bien une bijection entre X et Z. □

On peut maintenant démontrer le théorème de Cantor-Berstein:

Démonstration. Soit ϕ une injection de X vers Y. Soit ψ une injection de Y vers X. On a $\phi(X) \subseteq Y$ et $\psi(Y) \subseteq X$ donc $\psi(\phi(X)) \subseteq \psi(Y) \subseteq X$ Comme ϕ est injective, X et $\phi(X)$ sont en bijection. De même, comme ψ est injective, $\psi(\phi(X))$ et $\phi(X)$ sont en bijection. D'où X et $\psi(\phi(X))$ sont en bijection. En utilisant le lemme sur $\psi(\phi(X))$,$\psi(Y)$ et X, il vient X est en bijection avec $\psi(Y)$ Comme ψ est injective, Y est en bijection avec $\psi(Y)$ et finalement X et Y sont en bijection □

Remarques - La partie la plus difficile de la démonstration est celle du lemme, dont le résultat peut sembler évident au premier abord.

-Un énoncé similaire à ce théorème est :

Soit X et Y deux ensembles. S'il existe une surjection de X vers Y et une autre de Y vers X, alors les deux ensembles sont en bijection.

On a besoin d'une définition plus fine de la notion de cardinalité. On remarque que si deux ensembles finis ont même cardinaux alors ils sont en bijection. Pour les ensembles infinis ce n'est plus le cas. Il est donc naturel d'introduire la notion suivante :

Définition 1.3.5. Deux ensembles sont équipotents s'ils sont en bijection. Dans ce cas ont dira aussi qu'ils ont même cardinal.

Voici un théorème qui montre que cette définition permet d'exhiber des cardinaux infinis différents.

Theorem 1.3.6. *Soit X un ensemble.*

1. *Il n'existe pas de surjection de X vers $\mathcal{P}(X)$.*

2. *Il existe une injection de X vers $\mathcal{P}(X)$.*
3. *X n'est pas équipotent à $\mathcal{P}(X)$.*

Démonstration. 1) Supposons que $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ soit une surjection. Considérons $A = \{x \in X \,|\, x \notin f(x)\}$ Puisque f est surjective il existe $y \in X$ tel que $f(y) = A$

-Si $y \in A$, alors $y \notin f(y) = A$ ...c'est absurde !

-Si $y \notin A$, alors $y \in f(y) = A$,...c'est aussi absurde !

Il ne peux donc exister de surjection de X vers $\mathcal{P}(X)$.
2) L'application $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X) : x \mapsto \{x\}$ est clairement injective.

□

Définition 1.3.7. Un ensemble est dit dénombrable s'il est équipotent à l'ensemble des naturels $\mathbb{N}$.

Theorem 1.3.8. 1. *Tout sous ensemble infini de $\mathbb{N}$ est dénombrable.*
2. *Tout sous ensemble d'un ensemble dénombrable est fini ou dénombrable.*
3. *Si X est un ensemble dénombrable et $f : X \longrightarrow Y$ est une surjection alors Y est fini ou dénombrable.*
4. *Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des ensembles dénombrables alors $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ est dénombrable.*
5. *Soit $(X_1, X_2, X_3, \ldots)$ une suite finie ou infinie d'ensembles dénombrables. Alors l'ensemble $\bigcup_{i \geq 1} X_i$ est dénombrable.*

Démonstration. 1) Soit $X \subseteq \mathbb{N}$ un sous ensemble infini de $\mathbb{N}$. On peut ranger les éléments de X en ordre croissant dans une suite $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. L'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow X : n \mapsto x_n$ est alors une injection. D'autre part l'identité est une injection de X vers $\mathbb{N}$. Le théorème de Cantor-Berstein montre alors que X et $\mathbb{N}$ sont en bijection.
2) est une conséquence directe de 1)
3) Pour tout $y \in Y$, choisissons un élément x_y de X tel que $f(x_y) = y$. Alors l'application de $g : Y \longrightarrow X : y \mapsto x_y$ est une bijection de Y sur une partie Z de X. D'après 2) ci-dessus, Z est fini ou dénombrable, il en et donc de même de Y. 4) Par induction il suffit de considérer le cas de deux ensemble dénombrables X_1, X_2 et donc au cas de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On définit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : (m,n) \mapsto 2^n 3^m$. L'unicité de la décomposition en facteur premiers des naturels montre que cette application est injective (ou un raisonnement élémentaire). D'autre part l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n \mapsto (n,0)$ est injective également et le théorème de Cantor-Berstein nous permet de conclure.
5) Pour tout $i \in \mathbb{N}$ il existe une bijection $f_i : \mathbb{N} \longrightarrow X_i$. On définit alors une application surjective $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \cup_{i \geq 1} X_i : (i,j) \mapsto f_i(j)$. Le point 3) ci dessus nous permet de conclure que l'union des X_i est finie ou dénombrable, mais elle n'est clairement pas fini; elle est donc dénombrable.

□

Remarque On peut se passer du théorème de Cantor Berstein pour démontrer les résultats ci-dessus mais il facilite un peu la vie.

1.4 Relations d'équivalence, relations d'ordre

Définition 1.4.1. Soit E un ensemble et $\mathcal{R} = (E,E,G)$ une relation sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation

1. d'équivalence si elle réflexive symétrique et transitive.
2. d'ordre si elle est réflexive antisymétrique et transitive.

Exemples de relations d'équivalence

a) l'égalité sur un ensemble est une relation d'équivalence
b) Le parallélisme sur l'ensemble des droites du plan est une relation d'équivalence si on admet (par définition) qu'une droite est parllèle à elle-même.
c) la parité est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$.
d) Plus généralement "avoir le même reste (par défaut)" est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$.
e) Dans $\mathbb{N}^2$ la relation définie par

$$((a,b)\mathcal{R}(a',b')) \Leftrightarrow (a + b' = a' + b)$$

est une relation d'équivalence.

Définitions 1.4.2. Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E et $x \in E$.

a) on appelle classe d'équivalence de x et on note $\overline{x}$ le sous ensemble formé des éléments de E qui sont en relation avec x. on a donc

$$\forall x \in E \quad \overline{x} := \{y \in E \,|\, x\mathcal{R}y\}.$$

b) L'ensemble des classes d'équivalence d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur l' ensemble E est donc un sous ensemble de $\mathcal{P}(E)$. Cet ensemble s'appelle l'ensemble quotient de E par la relation $\mathcal{R}$ et est noté $E/\mathcal{R}$.
c) Un sous-ensemble $P \subseteq \mathcal{P}(E)$ tel que

$$a) \bigcup_{X \in P} X = E \qquad b) \forall X,Y \in P, X \cap Y = \emptyset$$

est appelé une partition de E.

Exemples

a) Pour le parallélisme sur les droites du plan, l'ensemble quotient s'appelle les directions du plan.

b) Pour la parité sur les naturels l'ensemble quotient a deux éléments : la classe de 0 et la classe de 1; c'est à dire les naturels pairs et les naturels inpairs respectivement.
c) Plus généralement pour la relation "avoir le même reste que" lors de la division par $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble quotient a n élémnents.
d) Pour la relation d'équivalence définie ci dessus sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'ensemble quotient est en bijection avec $\mathbb{Z}$. Une bijection est donnée par l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} : \overline{(a,b)} \mapsto a - b$. (établir que f est bien définie et est une bijection.)

Remarque

Un problème fréquent qui survient lors de la manipulation des ensembles quotients est le fait de déterminer qu'une certaine application est bien définie : c'est le passage au quotient. En fait, l' application est généralement définie en se servant des représentants des classes et il faut vérifier que l'application est indépendante du choix des représentants dans une même classe....

Proposition 1.4.3. *Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Les classes d'équivalence forment alors une partition de E. Réciproquement, Si P est une partitionb de E, on peut définir une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E telle que les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ soient exactement les éléments de P.*

Démonstration. On a, pour $x \in E$, $x \in \overline{x}$ (réflexivité) et donc l'union des classes d'équivalence est bien égale à E. D'autre part pour $(x,y,z) \in E^3$, si $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$ (ou de manière équivalente $x\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{R}y$) alors la transitivité de $\mathcal{R}$montre que pour tout $u \in E$ on a $u\mathcal{R}x \longrightarrow u\mathcal{R}z \longrightarrow u\mathcal{R}y$. C'est à dire $u \in \overline{x} \Longrightarrow u \in \overline{y}$ i.e. $\overline{x} \subseteq \overline{y}$. Par symétrie on conclut que $\overline{x} = \overline{y}$. Ainsi deux classes d'équivalence qui ont un élément en commun sont donc égales.

Pour la réciproque, étant donné une partition P de E, il suffit de définir la relation $\mathcal{R}$ sur E via :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists A \in P \,\text{tel que}\, \{x,y\} \subseteq A\,.$$

□

Remarque

Une relation sur E étant définie par un sous ensemble de $E \times E$ on peut utiliser les opérations ensemblistes (union,intersection,....)pour définir des opérations sur les relations.

définitions de majorant minorant plus petit élément,borne supérieur,borne inférieure

Chapitre 2

Introduction au calcul propositionnel

2.1 Introduction

Dans le cadre d'une théorie mathématique donne (par exemple la théorie des ensembles) une assertion est une phrase à laquelle on peut attibuer une valeur (principe du tiers exclus) de vérité et une seule (principe de non contradiction) à savoir **Vrai** ou **faux**. Une assertion vraie est appelée une proposition.

Les **axiomes** d'une théorie sont des propositions de base que l'on accepte et qui permettent de bâtir la théorie autrement dit on déduit d'autres propositions à partir de ces axiomes en utilisant les règles de logique.

2.2 Règles de logique et tables de vérité

Définitions 2.2.1. Soit P et Q deux assertions d'une théorie . On définit

1. la **négation** de P, notée $\neg P$, comme étant l'assertion qui est vraie lorsque P est fausse et qui est fause lorsque P et vraie.
2. l'**équivalence** de P et Q : P et Q sont équivalentes si P et Q ont la même valeur de vérité.

Tables de vérité

Une table de vérité spécifie les valeurs de vérité d'une assertion en fonction des valeurs de vérité d'autrs assertions. Ainsi la table de vérité de $\neg P$ est donnée par

P	$\neg P$
V	F
F	V

Les connecteurs binaires permettent de construire de nouvelles assertions d'une théorie à partir d'assertions existant déjà. On cite ci-dessous quelques connecteurs binaires, les tables de vérité associées sont rassemblées en un tableau.

Soit P et Q deux assertions on définit

1. le connecteur de conjonction, noté $\wedge$: l'assertion $P \wedge Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont toutes deux vraies.
2. le connecteur de disjonction, noté $\vee$: l'assertion $p \vee Q$ est vraie si et seulement si l'une au moins des deux assertions est vraie.
3. le connecteur d'implication $\Rightarrow$: l'assertion $P \Rightarrow Q$ est fausse si et seulement si P est vraie et Q est fausse.
4. le connecteur $\Leftrightarrow$, : l'assertion $P \Leftrightarrow Q$ est vraie si et seulement si les deux assertions sont équivalentes.

Voici le tableau reprenant les tables de vérité de ces connecteurs

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Exercice Montrer en utilisant une table de vérité que

1. $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$.
2. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$.

Comparer avec des lois analogues pour les opérations ensemblistes.

2.3 Formes propositionnelles : la syntaxe

Pour écrire les assertions on dispose de :

1. Un ensemble $\mathcal{V}$ dénombrable de variables propositionnelles : ce sont des symboles quelconques que l'on peut introduire à tout instant...En pratique on utilisera souvent des lettres majuscules A,B,... éventuellement indicées ou munies d'accents...
2. cinq connecteurs :
   (a) négation : $\neg$
   (b) disjonction : $\vee$
   (c) conjonction : $\wedge$
   (d) implication : $\Rightarrow$
   (e) équivalence : $\Leftrightarrow$

3. des parenthèses gauche (et droite).

Avec ces éléments on peut créer des suites finies qu'on appelle assemblages. Parmi ces assemblages on distingue les formes propositionnelles :

Définition 2.3.1. On appelle forme propositionnelle tout assemblage ϕ pour lequel il existe une suite finie d'assemblages $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n$ avec $\phi_n = \phi$ et tel qu pour chaque $i \leq n$ l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

1. ϕ_i est une variable propositionnelle.
2. il existe $j < i$ tel que $\phi_i = \neg(\phi_j)$.
3. il existe $i_1,i_2 < i$ et un connecteur c tel que $\phi_i = (\phi_{i_1})c(\phi_{i_2})$.

On remarque que les ϕ_i qui apparaissent dans la construction de ϕ sont elles mêmes des formes propositionnelles. On appelle ordre d'une forme propositionnnelle le nombre de connecteurs qui apparaissent dans ϕ.

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des formules propositionnnelles et $\mathcal{P}_\backslash$ l'ensemble des formes propositionnelles d'ordre n. On montre que $\mathcal{P} = \bigcup_{\backslash\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_\backslash$.

Exemple 2.3.2. Voici un exemple de construction

1. A
2. B
3. $\neg(A)$
4. $\neg(A) \Rightarrow (B)$
5. C
6. $(\neg(A) \Rightarrow (B)) \vee (C)$.

La forme obtenue est d'ordre 3.

On utilise souvent une notation simplifiée via

1. la suppression des parenthèses placées de part et d'autres d'une variable propositionnelle. Par exemple on écrit $\neg A$ au lieu de $\neg(A)$.
2. Suppression des parenthèses qui séparent des négations consécutives. Par exemple on écrit $\neg\neg\neg A$ au lieu $\neg(\neg(\neg(A)))$.
3. On utilise aussi des règles de "priorité" entre connecteurs : on convient que $\wedge$ et $\vee$ dominent $\neg$ et que $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ dominent $\wedge$ et $\vee$. Ainsi on écrira

$$\neg A \vee B \to C \quad \text{au lieu de } ((\neg A) \vee B) \Rightarrow C$$

Les tables de vérité sont assez longues à établir, on utilise parfois la méthode de **Quine**.

On introduit deux nouvelles variables propositionnelles $\mathbb{I}$ et $\mathbb{O}$ et on étend toute application de vérité v à $\mathbb{O}$ et $\mathbb{I}$ en posant toujours $v(\mathbb{O}) = 0$ et $v(\mathbb{I}) = 1$. Au lieu d'écrire $v(A) = 0$ on écrit $A \equiv \mathbb{O}$; de même au lieu d'écrire $v(A) = 1$ on écrit $A \equiv 1$.

Voici un exemple qui illustre la méthode de Quine :

<table>
<tr><td colspan="2">$A \equiv \mathbb{O}$</td><td>$A \equiv \mathbb{I}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\neg(\mathbb{O} \vee B \Rightarrow \mathbb{O}) \wedge B$</td><td>$\neg(\mathbb{I} \vee B \Rightarrow \mathbb{I}) \wedge B$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\neg(B \Rightarrow \mathbb{O}) \wedge B$</td><td>$\neg(\mathbb{I} \Rightarrow \mathbb{I}) \wedge B$</td></tr>
<tr><td>$B \equiv \mathbb{O}$</td><td>$B \equiv \mathbb{I}$</td><td>$\neg\mathbb{I} \wedge B$</td></tr>
<tr><td>$\neg(\mathbb{O} \Rightarrow \mathbb{O}) \wedge \mathbb{O}$</td><td>$\neg(\mathbb{I} \Rightarrow \mathbb{O}) \wedge \mathbb{I}$</td><td>$\mathbb{O} \wedge B$</td></tr>
<tr><td>$\neg\mathbb{I} \wedge \mathbb{O}$</td><td>$\neg\mathbb{O} \wedge \mathbb{I}$</td><td>$\mathbb{O}$</td></tr>
<tr><td>$\mathbb{O}$</td><td>$\mathbb{I} \wedge \mathbb{I}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\mathbb{O}$</td><td>$\mathbb{I}$</td><td></td></tr>
</table>

2.4 Formes propositionnelles : la sémantique

On introduit l'ensemble $\mathbb{B} = \{0,1\}$ que l'on munit d'une addition et d'une multiplication :

+	0	1
0	0	1
1	1	1

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

On définit aussi sur $\mathbb{B}$ une application $^{-} : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ via $\overline{0} = 1$ et $\overline{1} = 0$.

Définitions 2.4.1. 1. Une interprétation (ou valeur de vérité) est une application $v_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ dans $\{0,1\}$. Cette application s'étend naturellement de manière unique en une application $v : \mathcal{P} \longrightarrow \{0,1\}$ de manière que

   (a) $v(A) = v_{\mathcal{V}}(A)$ pour tout $A \in \mathcal{V}$,

   (b) $v(\mathbb{I}) = 1$ et $v(\mathbb{O}) = 0$,

   (c) $v(\neg\phi) = \overline{v(\phi)}$),

   (d) $v(\phi \longrightarrow \psi) = \overline{v(\phi)} + v(\psi)$.

2. On dira que deux formes ϕ et ψ sont équivalentes (noté $\phi \equiv \psi$) si pour toute application de vérité v, $v(\phi) = v(\psi)$.

Soit ϕ une formule qui ne dépend que des variables $A_1, A_2, \ldots, A_n$. La table de vérité de ϕ calcul $v(\phi)$ pour toute valeur de vérité (interprétation) des variables A_i. Il y a 2^n interprétation correpondant aux 2^n suites $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n) \in \mathbb{B}^n$. Autrement dit à toute suite $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ on fait correspondre v_ϵ via $v_\epsilon(A_i) = \epsilon_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ on peut alors calculer $v_\epsilon(\phi)$. On obtient ainsi une application $f_\phi : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B} : \epsilon \mapsto v_\epsilon(\phi)$. Le théorème suivant montre que toute application de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}$ peut-être obtenue de cette manière.

Theorem 2.4.2. *(théorème de complétude) Si $f : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$ est une application alors il existe $\phi \in \mathcal{P}$ telle que $f_\phi = f$.*

Démonstration. **Cas 1** Si $|f^{-1}(\{1\})| = 0$ i.e. $f(\sigma) = 0$ pour tout $\sigma \in \mathbb{B}^n$. alors $f = f_\phi$ où ϕ est la forme propositionnnelle $A \wedge \neg A$.

Cas 2 Si $|f^{-1}(\{1\})| = 1$ i.e. $f(\tau) = 1$ pour un certain $\tau \in \mathbb{B}^n$ et $f(\sigma) = 0$ si $\sigma \neq \tau$. Ecrivons $\tau = (\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)$ $(\tau_i \in \{0,1\})$ et posons $\phi = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n$ où

$$\psi_i = A_i \text{ si } \tau_i = 1 \quad \text{et} \quad \psi_i = \neg A_i \text{ si } \tau_i = 0\,.$$

On vérifie alors sans peine que $f_\phi = f$.

Cas général Supposons $|f^{-1}(\{1\})| = p$ où $p \geq 1$. $|f^{-1}(\{1\}) = \{\tau_1,\ldots,\tau_p\}$. On considére, pour $i = 1,\ldots,p$ la fonction $f_i : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$ définie par $f(\sigma) = 1$ ssi $\sigma = \tau_i$. Le cas 2 prmet de construire une forme propostionnelle ϕ_i telle que $f_i = f_{\phi_i}$. On pose alors $phi = \phi_1 \vee \phi_2 \vee \cdots \vee \phi_p$. On a alors $f_\phi(\sigma) = 1$ ssi il existe $i \in \{1,\ldots,p\}$ tel que $\phi_i(\sigma) = 1$ ssi il existe $i \in \{1,\ldots,p\}$ tel que $\sigma = \tau_i$. On conclut que $f = f_\phi$.

$\square$

On remarque que les formes ϕ construites dans la preuve ci-dessus ne font apparaître que les connecteurs $\wedge, \vee ,\neg$. On a donc

Corollary 2.4.3. *Toute forme propositionnelle est équivalente à une forme propositionnelle où n'apparaissent que les connecteurs* $\wedge, \vee ,\neg$.

En fait on peut faire mieux : remarquons tout d'abord que

$$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \quad \text{et} \quad A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)\,.$$

Ainsi on remarque que dans une forme propositionnelle on peut remplacer "$\wedge$" en utilisant "$\neg$" et "$\vee$".

Ou alors on peut remplacer "$\vee$" en utilisant "$\neg$" et "$\wedge$". On conclut

Corollary 2.4.4. *Toute forme propositionnelle est équivalente à une forme propositionnelle ne faisant apparaître que les connecteurs* $\neg$ *et* $\wedge$. *e même toute forme propositionnelle est équivalente à une forme propositionnelle ne faisant apparaître que les connecteurs* $\neg$ *et* $\vee$.

Remarque

a) on peut encore faire mieux il est possible de n'utiliser qu'un connecteur (connecteur de Sheffer)...

b) En utilisant les symboles $\mathbb{O}$ et $\mathbb{I}$ on peut montrer que le connecteur $\Rightarrow$ suffit pour écrire toutes les formes propositionnelles. Ceci est du au fait que :

$$(\neg A) \Leftrightarrow (A \Rightarrow \mathbb{O}) \quad \text{et} \quad A \vee B \Leftrightarrow (A \Rightarrow \mathbb{O}) \Rightarrow B$$

Définition 2.4.5. Soit Σ un ensembles de formes propositionnelles. On dit que Σ est compatible (on dit aussi consistant) si etseulement si il existe une interprétation qui rend vraie toutes les F.P. de Σ.

Theorem 2.4.6. *(théorème de finitude) Un ensemble* Σ *de formes propositionnelles est compatible si et seulement si toute partie finie de* Σ *est compatible.*